

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST JUL 2 1924.



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

I

10132

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

20652 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT-DEUXIÈME. — ANNÉE 1894.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1894

180095
6/5/23

QA

1

S59

t.22-23

V

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.		MM.	
1873	CHASLES.	1884	PICARD.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1885	APPELL.
1875	BIENAYMÉ.	1886	POINCARÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.	1887	FOURET.
1877	MANNHEIM.	1888	LAISANT.
1878	DARBOUX.	1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1879	O. BONNET.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1880	JORDAN.	1891	COLLIGNON.
1881	LAGUERRE.	1892	VICAIRE.
1882	HALPHEN	1893	HUMBERT.
1883	ROUCHÉ.	1894	PICQUET.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

- BENOIST, docteur en droit, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loir).
BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BIOCHE, professeur de mathématiques, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, à Paris.
BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, à Bar-le-Duc (Meuse).
CAVET, ingénieur civil, à Paris.
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, à Paris.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur, à Paris.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, à Paris.
HERMITE, membre de l'Institut, à Paris.
JORDAN, membre de l'Institut, à Paris.
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
DE MENDIZABAL TAMBORÉL, à Mexico.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques, à Paris.
PEROTT (Joseph), à Worcester (Massachusetts).
PERBIN, ingénieur en chef des mines, au Mans (Sarthe).
POINCARÉ, membre de l'Institut, à Paris.
POLIGNAC (prince C. de), à Grasse (Alpes-Maritimes).
RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
TANVIER (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Paris.
TARRY, inspecteur des contributions diverses, à Alger.
TCHÉBICHEF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
-

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1894 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. JORDAN. TCHÉBICHEF.
--------------------------------------	---	---

Président		MM. PICQUET.
Vice-Présidents	{	DE COMBEROUSSE. GOURSAT. KOENIGS. POINCARÉ.
Secrétaires	{	CARVALLO. RAFFY.
Vice-Secrétaires	{	L. LÉVY. PAINLEVÉ.
Archiviste		BIOCHE.
Trésorier		CLAUDE-LAFONTAINE.

Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1896. APPELL, 1897. COLLIGNON, 1895. FOURET, 1896. HATON DE LA GOUPIILLIÈRE, 1897. HUMBERT, 1895. LAISANT, 1895. MANNHEIM, 1897. D'OCAGNE, 1895. PICARD, 1897. ROUCHÉ, 1896. VICAIRE, 1896.
---	---	---

⁽¹⁾ MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

⁽²⁾ La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris.
1893. ADAM (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, avenue de Villars, 2, à Paris.
1881. AMIGUES, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1872. ANDRÉ (Desiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. ANTONARI, directeur des études à l'Ecole Monge, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1879. APPELL, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1884. ARNAUD, ingénieur des ponts et chaussées, à Arles (Bouches-du-Rhône).
1892. ARNOUX (G.), ancien officier de marine, aux Mées (Basses-Alpes).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des ponts et chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1886. BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. BEGHIN (Maurice), ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Bourgogne, 40, à Paris.
1874. BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalou-sur-Saône (Saône-et-Loire).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1887. BEYENS (Ignacio), major du génie, santa Inès, 5, à Cadix (Espagne).
1872. BIENAYMÉ (Arthur), directeur du matériel au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. BIOCHE, professeur au collège Stanislas, rue Vavin, 5, à Paris.
1875. BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris.
1890. BJERKNES, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1891. BLUTEL, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Condorcet, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. BONAPARTE (prince Roland), Cours la Reine, 22, à Paris.
1881. BONCOMPAGNI (le prince Balthasar), palais Piombino, place Colonna, à Rome (Italie).
1873. BOULANGER, professeur de mathématiques, rue Constantine, 101, à Mustapha inférieur (Algerie).
1886. BRAULT (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISSE (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vauquelin, 18, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc (Meuse).
1886. BRUNEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1893. BURCKHARDT, privat-docent à l'Université de Göttingue, avenue Marceau, 37, à Paris.
1893. CALABRERA, professeur à l'Université, via Macqueda, 230, à Palerme (Italie).
1888. CANET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, rue Vignon, 3, à Paris.
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1892. CARONNET, licencié ès sciences mathématiques et physiques, avenue de Villiers, 10, à Paris.
1887. CARVALLO, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, villa Saïd, 19, Paris-Passy.
1887. CASPARY, professeur à l'École d'Architecture, Invalidenstrasse, 123, Berlin (Allemagne).
1873. CATALAN, professeur émérite à l'Université, rue des Éburons, 21, à Liège (Belgique).

Date
de
l'admission.

1890. CEDERCRANTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), à Helsingfors (Finlande).
1892. CELLÉRIER (Gustave), boulevard de Port-Royal, 48, à Paris.
1887. CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris.
1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris.
1872. COLLIGNON, inspecteur général des ponts et chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
1890. COLOT, au château du Seuil, à Cérons (Gironde).
1875. COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
1872. COURCELLES, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
1880. CRETIN, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1872. DARBOUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
1885. DAUTHEVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
1885. DEMARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
1892. DEMOULIN (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, répétiteur à l'Université, rue du Soleil, 8, à Gand (Belgique).
1883. DERUYTS, docteur ès sciences, chargé de cours à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1872. DEWULF, général du génie en retraite, rue de l'Aigle d'Or, 11, à Aix (Bouches-du-Rhône).
1886. DUNCAN, assistant à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
1873. FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au collège de Parthenay (Deux-Sèvres).
1892. FEHR (Henri), licencié ès sciences mathématiques, rue de Vaugirard, 46, à Paris.
1885. FERRAZ, professeur au lycée, à Toulouse (Haute-Garonne).
1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, Burlington Street, 10, à Hamilton (Canada).
1893. FLEURY, ancien chef d'institution, rue de la Santé, 46, à Paris.
1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).

Date
de
l'admission

1872. **FLAYE SAINT-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1891. **FONTVIOLANT (DE)**, professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
1889. **FOLCHÉ**, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
1872. **FOIRET**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
1892. **FROLOV** (le général), quai Pierre-Fatio, 10, à Genève (Suisse).
1872. **GABRIEL**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Joulfroy, 39, à Paris.
1872. **GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. **GENTY (E.)**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Oran (Algérie).
1890. **GENTY (Max)**, enseigne de vaisseau, à bord du *Heron* (station locale du Sénégal).
1892. **GENTY (Paul)**, rue Corneille, 5, à Paris.
1893. **GÉRARD**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Lyon.
1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1881. **GOUSAT**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1872. **GRANDOUGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
1880. **GLICIA (Jean)**, professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. **GUIMARAES**, officier du génie, rua de Sacramento à Lapa, 44, à Lisbonne (Portugal).
1881. **GUNTHER (D^r Sigismund)**, professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. **HAAG**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. **HABICH**, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris.
1872. **HENRY**, inspecteur général des ponts et chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. **HENRY (Charles)**, Bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. **HERMITE**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1893. **HOUX**, professeur en retraite, rue des Fossés Saint-Jacques, 16, à Paris.
1879. **HOLST (Elling)**, professeur à l'École Polytechnique, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. **HOLBIGANT**, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. **HUGO (Comte L^s)**, traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. **HUBERT**, ingénieur des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de l'Arcade, 24, à Paris.
1887. **IBRAHIM EFFENDI**, professeur de mathématiques à l'École impériale civile de Médecine, à Constantinople (Turquie).
1881. **IMMER**, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgollier, 1, à Paris.
1887. **ISSALA (Abbe)**, rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. **JANIN**, chef d'escadron au 17^e régiment d'artillerie, à la Fère (Aisne).
1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.

Date
de
l'admission.

1889. **JONQUIÈRE** (Alfred), docteur en philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris.
1872. **JOUFFRET**, lieutenant-colonel d'artillerie, à Bourges (Cher).
1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1890. **KÖBE** (Gustaf), maître de Conférences à l'Université de Stockholm (Suède).
1892. **KÖCH** (H. von), maître de conférences à l'Université de Stockholm (Suède).
1880. **KÉNIGS**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1881. **LACOR**, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 96, à Paris.
1873. **LAISANT**, docteur ès sciences mathématiques, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1893. **LANCELIN**, boulevard Arago, 97, à Paris.
1875. **LAQUIÈRE**, administrateur de la commune mixte de Tablat (département d'Alger).
1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
1881. **LAVEISSIÈRE**, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
1880. **LEAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, boulevard du Mont-Parnasse, 12, à Paris.
1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littre, 5, à Paris.
1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, rue des Auges, 21, à Liège (Belgique).
1882. **LE PONT**, rue Saint-Jacques, 247, à Paris.
1891. **LERVY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. **LESPIAULT**, ancien professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1882. **LÉVY** (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. **LIGUINE**, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Georgenstrasse, 42, à Munich (Bavière).
1886. **LILOVILLE**, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. **LORIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue du Trocadéro, 19, à Paris.
1886. **LYON**, docteur ès sciences mathématiques, au bureau de M. le baron de Gunsbourg, à Saint-Petersbourg (Russie).
1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1875. **MALLOIZEL**, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 17, à Paris.
1892. **MANGEOT**, docteur ès sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 29, à Troyes (Aube).
1872. **MANNHEIM**, colonel d'artillerie en retraite, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris.
1884. **MARTIN** (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).

Date
de
l'admission

1884. MARTIN (Emile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 141, à Paris.
1893. MARTIN (Gaston), professeur de mathématiques, rue Truffaut, 118, à Paris.
1893. MATHÉ, censeur des études au lycée, à Saint-Brieuc (Côtes-du-Nord).
1890. MASSIEL, inspecteur général des mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1886. MAXIMOVITCH (Vladimir), professeur à l'Université, rue Timoficoska, 8, à Kiew (Russie).
1889. MENDIZABAL TAMROKEL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. MERCEHEAU, licencié ès sciences, rue Denfert-Rochereau, 21, à Paris.
1893. MICHEL, lieutenant du génie, à Montpellier (Hérault).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. OCAGNE (D'), ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1893. PAINLEVÉ, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Rennes, 99, à Paris.
1888. PAPELIER (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. PARMENTIER, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. PARRAN, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1893. PASSERAT, ancien élève de l'École Polytechnique, rue des Archives, 41, à Paris.
1884. PAUTONNIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. PELLET, doyen de la Faculté des Sciences, rue Ballainvilliers, 7, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. PELLETREAU, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. PERCIN, lieutenant-colonel d'artillerie, directeur de la manufacture d'armes, à Saint-Étienne (Haute-Loire).
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. PENNIN, ingénieur en chef des mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe).
1892. PENNIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Soufflot, 13, à Paris.
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Bara, 9, à Paris.
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1882. POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), villa Jessie, route de Cannes, à Grasse (Alpes-Maritimes).
1877. POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. PRESLE (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Mouge, 82, à Paris.

Date
de
l'admission.

1872. PUTZ, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1893. QUINTARD, professeur de mathématiques, boulevard des Batignolles, 45, à Paris.
1872. RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure, boulevard Saint-Michel, 99, à Paris.
1881. RIBOT, professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon (Côte-d'Or).
1893. RIVEREAU (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1888. ROBIN (Gustave), docteur ès sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. RODET, ingénieur des manufactures de l'État, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. ROUCHÉ (Engène), professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
1885. ROQUET, professeur de mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Condorcet, rue du Rocher, 35, à Paris.
1888. RUSSO (Giovanni), professeur, palazzo Serravalle, via Aranci, 2, à Catanzaro (Italie).
1881. SAINT-PAUL (DUCREUX), lieutenant-colonel d'artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
1889. SARAZ, professeur de mathématiques, rue Saint-Jacques, 229, à Paris.
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL (Dr Victor), professeur à l'École technique, à Hagen (Allemagne).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1877. SÉGUY, avenue des Gobelins, 28, à Paris.
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, rue Miroménil, 70, à Paris.
1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1886. STIELTJES, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Fleurance-Montplaisir, 4, à Toulouse (Haute-Garonne).
1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège).
1872. TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris.
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. TARRY (Gaston), inspecteur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
1882. TCHÉBICHEF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg (Russie).
1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, rue Larribe, 3, à Paris.
1872. TISSERAND, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire, à Paris.

Date
de
l'admission.

1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue de Téhéran, 24, à Paris.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées, château de Courtozé, par Vendôme (Loir-et-Cher).
1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1893. VALLEE-POUSSIN (de la), chargé de cours à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1880. VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Kralové Hradec (Autriche).
1885. VANECEK (M.-M.), professeur, à Kralové Hradec (Autriche).
1890. VASCHY, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. VICAIRE, ingénieur en chef des mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université, à Pise (Italie).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Pierre Charron, 1, à Paris.
1880. WALCKENAER, ingénieur des mines, 9, rue Bayard, à Paris.
1879. WEILL, professeur au collège Chaptal et à l'école Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1872. WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Hauptstrasse, 109, à Vienne (Autriche).
1882. WILSON, avenue d'Iéna, 2, à Paris.
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris.
1882. ZABOTDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, à Digne (Basses-Alpes).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Ostergade, 10, à Copenhague (Danemark).

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik</i> (M. Lampe, Kurfürstenstrasse), 139.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i> (rédacteur M. Fuchs, Kronprinzen Ufer, 24).	Allemagne.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédacteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> chez M. Gammeneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas</i> (rédacteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédacteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (rédacteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate</i> .	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique</i> .	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actnaires français.	France.
Palerme.....	<i>Circolo matematico (Rendiconti del)</i> .	Italie.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei</i> .	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse</i> .	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. MM. Escherich et Weyr).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 JANVIER 1894.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

La Société procède au renouvellement de son bureau et à l'élection de quatre membres du Conseil.

Démissions :

MM. Henri Buisson et Léon Lévy adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communication :

M. Humbert : *Sur une surface du sixième ordre en relation avec les fonctions abéliennes de genre trois.*

SÉANCE DU 17 JANVIER 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Lancelin : *Essai d'application de la théorie des variables complexes au problème des trois corps dans le cas des mouvements plans.*

M. Bioche : *Sur le degré des lignes asymptotiques des surfaces dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire.*

M. Picquet : *Sur l'identité du problème du neuvième point commun à un faisceau de cubiques planes avec celui du huitième point commun à un réseau de quadriques.*

M. Raffy : *Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques.*

M. Émile Picard adresse un Mémoire : *Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

. SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA THÉORIE DE LA PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ;

Par M. ÉMILE PICARD.

Les variations du potentiel électrique dans un fil qui transmet une perturbation électrique ont été, comme l'on sait, représentées par l'équation

$$A \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial V}{\partial t} = C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2};$$

V est le potentiel, et A , B , C sont trois constantes positives.

En choisissant convenablement les unités, on peut réduire l'équation à la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

et enfin, en posant

$$V = U e^{-t},$$

on a l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U.$$

M. Poincaré a fait récemment, dans les *Comptes rendus* ⁽¹⁾, une discussion des intégrales de cette équation, fort intéressante au point de vue physique : j'ai montré ensuite ⁽²⁾ comment l'équa-

(1) H. POINCARÉ [Sur la propagation de l'électricité (*Comptes rendus*, 26 décembre 1893)].

(2) EM. PICARD [Sur l'équation aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la propagation de l'électricité (*Comptes rendus*, 2 janvier 1894)].

tion précédente pouvait être discutée de la manière la plus simple et la plus rigoureuse à l'aide de la méthode générale de Riemann, méthode fondamentale dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles : c'est ce que je me propose de développer ici.

1. Je rappellerai d'abord les résultats de Riemann, en me reportant à la remarquable exposition faite par M. Darboux, dans le tome II de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (p. 75). Prenons l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0,$$

et soit considérée en même temps son adjointe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) u = 0,$$

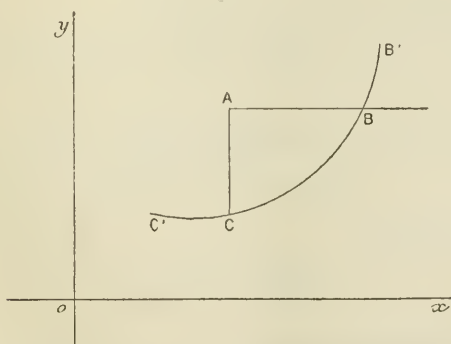
et posons

$$M = au z + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$N = bu z + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Soient $B'C'$ (fig. 1) une courbe tracée arbitrairement dans le plan et A un point quelconque de ce plan.

Fig. 1.



En désignant par x_0, y_0 les coordonnées de A , supposons que l'on ait déterminé la solution

$$u(x, y; x_0, y_0)$$

de l'équation adjointe, se réduisant à l'unité pour $x = x_0$, $y = y_0$, et prenant la valeur

$$e^{\int_{x_0}^x b \, dx}$$

pour $y = y_0$, tandis qu'elle prend la valeur

$$e^{\int_{y_0}^y a \, dy}$$

pour $x = x_0$. Dans ces conditions, on aura

$$(u z)_A = \frac{(u z)_B + (u z)_C}{2} - \int_C^B (N \, dx - M \, dy),$$

l'intégrale curviligne étant prise le long de CB' .

Cette formule permet de déterminer la solution z de l'équation aux dérivées partielles proposée, qui prend des valeurs données ainsi que l'une de ses deux dérivées pour les points de la courbe $B'C'$. L'équation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

appliquée à un déplacement suivant cette courbe, détermine évidemment celle des deux dérivées premières qui n'est pas donnée *a priori*.

2. Ceci rappelé, revenons à l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z,$$

en remplaçant U par z . Transformons-la en posant

$$2X = x + t, \quad 2Y = x - t.$$

On obtient de suite

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + z = 0.$$

L'équation adjointe est ici :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + u = 0,$$

c'est la même équation.

Supposons qu'une intégrale de l'équation (1) soit déterminée par les conditions initiales suivantes : on se donne z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t=0$, ces valeurs étant seulement *différentes de zéro* pour x compris entre a et b ($a > b$).

On voit alors que, pour l'équation (2), on peut considérer la fonction z ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre *comme données sur la bissectrice de l'angle des axes*; les valeurs données sont seulement *différentes de zéro* sur un segment fini de cette bissectrice, à savoir le segment déterminé par les équations

$$X = Y = \frac{x}{2},$$

x variant de b à a .

3. Pour appliquer la méthode de Riemann, nous avons seulement à voir si nous pouvons déterminer l'intégrale u de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + u = 0$$

qui pour $X = X_0$ prend la valeur *un quel que soit* Y , et qui pour $Y = Y_0$ prend la valeur *un quel que soit* X . Or cette recherche est immédiate, car, en posant

$$\lambda = (X - X_0)(Y - Y_0),$$

on trouvera une fonction $u = \varphi(\lambda)$ satisfaisant à l'équation précédente; en effet, on obtient ainsi l'équation de Bessel

$$\lambda \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \frac{d\varphi}{d\lambda} + \varphi = 0$$

et la fonction cherchée est la série de Bessel

$$u = 1 - \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(1.2)^2} - \frac{\lambda^3}{(1.2.3)^2} + \dots$$

4. Figurons (fig. 2) le plan (X, Y) .

L'intégrale z est nulle ainsi que $\frac{\partial z}{\partial X}$ (et par suite $\frac{\partial z}{\partial Y}$) sur la bissectrice des axes, sauf sur la partie βz ; on a sur cette partie des

successions de valeurs données pour z et $\frac{\partial z}{\partial X}$ (d'où résulte la valeur de $\frac{\partial z}{\partial Y}$). Nous avons donc la formule

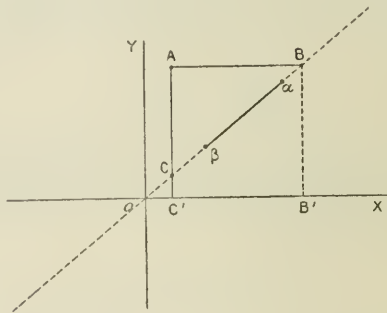
$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2} \int_C^B \left(u \frac{\partial z}{\partial X} - z \frac{\partial u}{\partial X} \right) dX - \left(u \frac{\partial z}{\partial Y} - z \frac{\partial u}{\partial Y} \right) dY,$$

ce que l'on peut écrire :

$$z_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2} \int_C^B \varphi \left(\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y} \right) dX - \frac{(X_0 - Y_0)}{2} \int_C^B z \frac{d\varphi}{d\lambda} dX.$$

On peut regarder sous les signes d'intégration $\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y}$ et z comme des fonctions arbitrairement données de X , différentes de

Fig. 2.



zéro entre $\frac{b}{2}$ et $\frac{a}{2}$ et nulles pour toute autre valeur de X ; désignons-les par $\psi(X)$ et $\chi(X)$. Nous aurons donc

$$z(t_0, x_0) = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \frac{1}{2} \int_{C'}^B \varphi(\lambda) \psi(X) dX - t_0 \int_{C'}^B \chi(X) \varphi(\lambda) dX$$

$$2X_0 = x_0 + t_0, \quad 2Y_0 = x_0 - t_0,$$

en désignant par C' et B' les projections de C et B sur OX , et en posant

$$\lambda = \left(X - \frac{x_0 + t_0}{2} \right) \left(Y - \frac{x_0 - t_0}{2} \right).$$

Telle est la forme de l'intégrale générale de l'équation (1).

5. Discutons la valeur de $z(t_0, x_0)$, quand, x_0 étant arbitraire mais fixe, t_0 varie de 0 à $+\infty$.

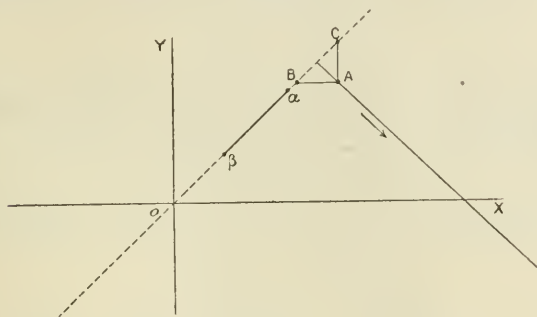
Supposons x_0 en dehors de l'intervalle ba . Les relations

$$2X_0 = x_0 + t_0, \quad 2Y_0 = x_0 - t_0$$

montrent que le point A de coordonnées X_0, Y_0 se déplace sur une droite perpendiculaire à $z\beta$, comme l'indique la fig. 3 qui correspond à $x_0 > a$.

Tant que t_0 est trop petit pour que le point B soit situé dans l'in-

Fig. 3.



tervalle $z\beta$, tous les termes figurant dans l'expression de $z(t_0, x_0)$ sont nuls. C'est seulement quand B arrive en z que z devient différent de zéro; ceci se produit quand

$$\frac{x_0 - t_0}{2} = \frac{a}{2},$$

c'est-à-dire à l'instant $x_0 - a$, et la partie ne contenant pas de signe d'intégration dans $z(t_0, x_0)$, c'est-à-dire $\frac{(uz)_B}{2}$, sera *différente de zéro* depuis le temps $x_0 - a$ jusqu'au temps $x_0 - b$. On peut dire que *cette partie correspond à une onde régulière*.

Une fois le temps $x_0 - b$ dépassé, la valeur de z se réduit à

$$z(t_0, x_0) = -\frac{1}{2} \int_b^{\frac{a}{2}} \varphi_1(\lambda) \psi_1(X) dX - t_0 \int_b^{\frac{a}{2}} \gamma_1(X) \varphi_1'(\lambda) dX.$$

On voit donc ainsi bien nettement *une sorte de résidu laissé par l'onde régulière que représentait le terme* $\frac{(uz)_B}{2}$.

Quant à la valeur asymptotique de $z(t_0, x_0)$ ou plutôt de

$$V(t_0, x_0) = e^{-t_0} z(t_0, x_0)$$

pour t_0 très grand, elle serait facile à obtenir à l'aide de l'expression asymptotique bien connue de $\varphi(\lambda)$ pour λ infini, mais je ne m'y arrêterai pas; ce que nous venons de dire suffit pour montrer la nature des intégrales de *l'équation des télégraphistes*.

SUR LES GÉODÉSIQUES SPÉCIALES DES SURFACES HARMONIQUES;

Par M. L. RAFFY.

1. On sait que, si l'élément linéaire d'une surface est réductible à la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

les lignes géodésiques de cette surface ont pour équation finie

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{a-V}} = b.$$

Si l'on établit une dépendance quelconque entre les deux constantes arbitraires a et b , on obtient une famille de géodésiques. Mais on peut aussi attribuer à l'une de ces constantes une valeur numérique. Il y a lieu de considérer, en particulier, les familles de géodésiques qui s'obtiennent en prenant pour a une valeur numérique a_0 et laissant varier b . Nous leur donnerons, pour abréger le langage, le nom de *géodésiques spéciales*.

Il existe entre les géodésiques spéciales et la forme de l'intégrale quadratique une relation que voici :

Étant donnée une surface harmonique d'élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

si on la rapporte à une famille de géodésiques spéciales $\eta_1 = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales $\eta = \text{const.}$, en sorte qu'il vient

$$(2) \quad ds^2 = d\eta^2 + \sigma d\eta_1^2,$$

l'équation aux géodésiques relative aux variables ϑ et ϑ_1

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1$$

admet une intégrale quadratique dont le terme en p^2 est affecté d'un coefficient constant et peut, par suite, être supposé nul.

Réciproquement, si pour l'élément linéaire (2), l'équation aux géodésiques

$$p^2 + \frac{q^2}{\sigma} = 1$$

admet une intégrale quadratique dont le terme en p^2 a un coefficient constant, les géodésiques $\vartheta_1 = \text{const.}$ sont des géodésiques spéciales, c'est-à-dire qu'après le changement de variables qui ramène l'élément linéaire (2) à la forme (1), ces géodésiques sont représentées par l'équation

$$\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}} = 0,$$

où a est une constante numérique.

2. On sait en effet que, pour l'élément linéaire (1), l'intégrale quadratique du problème des géodésiques est

$$(3) \quad I \equiv \frac{V}{U-V} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial u} \right)^2 + \frac{U}{U-V} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial v} \right)^2 = \text{const.}$$

On sait aussi que l'élément linéaire (1) peut s'écrire

$$ds^2 = (\sqrt{U-a} du + \sqrt{a-V} dv)^2 + (U-a)(a-V) \left(\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}} \right)^2,$$

de sorte que, pour rapporter la surface à une famille de géodésiques spéciales $\vartheta_1 = \text{const.}$ et à leurs trajectoires orthogonales $\vartheta = \text{const.}$, on fera le changement de variables

$$(4) \quad \begin{cases} d\vartheta = \sqrt{U-a} du + \sqrt{a-V} dv, \\ d\vartheta_1 = \frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}}. \end{cases}$$

Voyons ce que devient l'intégrale I quand on l'exprime en ϑ

et θ_1 . L'identité générale

$$d\pi = \frac{\partial \pi}{\partial \theta} (\sqrt{U-a} du + \sqrt{a-V} dv) + \frac{\partial \pi}{\partial \theta_1} \left(\frac{du}{\sqrt{U-a}} - \frac{dv}{\sqrt{a-V}} \right),$$

où nous posons

$$\frac{\partial \pi}{\partial \theta} = p, \quad \frac{\partial \pi}{\partial \theta_1} = q,$$

donne immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial u} &= p \sqrt{U-a} + \frac{q}{\sqrt{U-a}}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial v} &= p \sqrt{a-V} - \frac{q}{\sqrt{a-V}}. \end{aligned}$$

Il suffit de porter ces expressions dans l'intégrale (3) pour voir que le coefficient de p^2 se réduit à la constante a . On peut donc, en retranchant de cette intégrale l'équation aux géodésiques

$$p^2 + \frac{q^2}{a} = 1,$$

multipliée par a , obtenir une nouvelle intégrale quadratique dépourvue de terme en p^2 , ce qui prouve la première partie de notre énoncé.

3. Pour établir la réciproque, nous allons déterminer le changement de variables

$$(5) \quad \begin{cases} d\theta = M du + N dv, \\ d\theta_1 = M_1 du + N_1 dv, \end{cases}$$

par lequel on passe, dans l'hypothèse actuelle, de l'élément linéaire (2) à l'élément linéaire (1).

L'identité

$$(U=V)(du^2+dv^2) - (M du + N dv)^2 + \tau(M_1 du + N_1 dv)^2$$

entraîne les trois relations

$$M^2 + \tau M_1^2 = U - V, \quad MN + \tau M_1 N_1 = 0, \quad N^2 + \tau N_1^2 = U - V,$$

entre lesquelles on élimine aisément M_1 et N_1 . On trouve ainsi

$$(6) \quad U - V = M^2 + N^2.$$

Mais, par hypothèse, le coefficient de p^2 dans l'intégrale quadratique I exprimée en θ et θ_1 se réduit à une constante. Or les formules (5) donnent, pour la fonction π ,

$$\frac{\partial \pi}{\partial u} = Mp + M_1 q, \quad \frac{\partial \pi}{\partial v} = Np + N_1 q.$$

D'après cela, si nous calculons le coefficient de p^2 dans l'intégrale (3), en l'égalant à une constante a , nous trouverons

$$\frac{VM^2 + UN^2}{U - V} = a,$$

ce qui peut s'écrire

$$-\frac{V}{N^2 - a} = \frac{U}{M^2 + a} = \frac{1}{h},$$

en désignant par h une indéterminée. Ces deux relations donnent

$$M^2 = Uh - a, \quad N^2 = a - Vh;$$

la substitution de ces valeurs dans la condition (6) montre que h est égal à l'unité. On a donc

$$M = \sqrt{U - a}, \quad N = \sqrt{a - V},$$

et, par suite,

$$d\theta = \sqrt{U - a} du + \sqrt{a - V} dv.$$

Dès lors la différence $ds^2 - d\theta^2$, qui n'est autre que $\pi d\theta_1^2$, se réduisant à

$$(U - a)(a - V) \left(\frac{du}{\sqrt{U - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - V}} \right)^2$$

en vertu de l'identité rappelée au début, l'équation $d\theta_1 = 0$ revient à

$$\frac{du}{\sqrt{U - a}} - \frac{dv}{\sqrt{a - V}} = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

4. Supposons maintenant qu'un élément linéaire de surface harmonique soit donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2,$$

et cherchons sous quelles conditions les géodésiques $v = \text{const.}$ seront des géodésiques spéciales.

Nous devons exprimer que l'équation aux géodésiques

$$\Delta = p^2 + \frac{q^2}{G} = 1$$

admet une intégrale quadratique dépourvue de terme en p^2

$$I \equiv 2Bpq + Cq^2 = \text{const.}$$

Écrivons, à cet effet, que le crochet

$$[\Delta, I] \equiv \frac{\partial \Delta}{\partial u} \frac{\partial I}{\partial p} - \frac{\partial \Delta}{\partial p} \frac{\partial I}{\partial u} + \frac{\partial \Delta}{\partial v} \frac{\partial I}{\partial q} - \frac{\partial \Delta}{\partial q} \frac{\partial I}{\partial v}$$

est nul quels que soient p et q . L'identité ainsi obtenue

$$q^3(BG'_u + CG'_v + GC'_v) + pq^2(BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u) + 2qp^2G^2B'_u = 0$$

donne lieu aux trois équations

$$\begin{aligned} BG'_u + CG'_v + GC'_v &= 0, \\ BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u &= 0, \\ B'_u &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi B est une fonction de v seulement, d'où cette conclusion :

Un élément linéaire étant donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2,$$

pour qu'il convienne à des surfaces harmoniques et qu'en outre les courbes $v = \text{const.}$ soient des géodésiques spéciales, il faut et il suffit qu'il existe une fonction B de la seule variable v et une fonction C de u et de v qui vérifient les deux équations

$$(7) \quad BG'_u + CG'_v + GC'_v = 0,$$

$$(8) \quad BG'_v + 2GB'_v + G^2C'_u = 0$$

où B' désigne la dérivée de B .

5. Nous allons appliquer cette règle à l'élément linéaire des surfaces qui présentent une famille de courbes parallèles dont la courbure géodésique en chaque point est fonction de la courbure totale. Si l'on rapporte ces surfaces aux courbes considérées ($u = \text{const.}$) et aux géodésiques orthogonales ($v = \text{const.}$), leur élément linéaire prend la forme ci-dessus. La courbure géodé-

sique ω des courbes $u = \text{const.}$ et la courbure totale $(R_1 R_2)^{-1}$ de la surface ont respectivement pour valeurs

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \frac{1}{R_1 R_2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Nous exprimerons donc notre hypothèse en écrivant que la combinaison

$$-\frac{1}{R_1 R_2} - \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2 = -\frac{\partial \omega}{\partial u}$$

est une fonction de ω , ce qui revient à

$$\psi'(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial u} = 1.$$

L'intégration introduit une fonction arbitraire V de v et donne

$$\psi(\omega) = u + V.$$

On conclut de là que ω est une fonction de $u + V$, et si l'on pose

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u + V)}} \frac{\partial \sqrt{\varphi(u + V)}}{\partial u},$$

on trouve immédiatement

$$G(u, v) = \varphi(u + V),$$

en réduisant à l'unité, comme il est permis, la fonction de v qui devrait multiplier le second membre. Nous obtenons ainsi l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u + V) dv^2,$$

qui convient en particulier à toutes les surfaces de révolution quand la dérivée de V se réduit à une constante.

6. Pour simplifier la discussion des équations (7) et (8) qui expriment la propriété des géodésiques spéciales, nous supposons que la fonction B se réduit à une constante, ce qui permet de faire $B = 1$. Alors ces équations deviennent

$$(9) \quad \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial (CG)}{\partial v} = 0,$$

$$(10) \quad \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{G} = 0.$$

Introduisons l'hypothèse

$$G = \varphi(u + V).$$

L'équation (10) s'écrira

$$\frac{\partial C}{\partial u} - V' \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\varphi} = 0.$$

Intégrant et désignant par W une fonction inconnue de v , on a

$$(10)' \quad C = \frac{V'}{\varphi} + W,$$

d'où, par substitution dans l'équation (9),

$$(9)' \quad (WV' + 1)\varphi' + W'\varphi + V'' = 0.$$

Avant d'aller plus loin, indiquons que la supposition $V' = 0$ conduirait à l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{au} dv^2$$

des surfaces à courbure totale constante.

Ce cas particulier mentionné, différencions l'équation (9)' par rapport à u , nous aurons

$$(11) \quad (WV'' + 1)\varphi'' + W'\varphi' = 0.$$

Supposons d'abord $WV' + 1 = 0$, ce qui exige soit $\varphi' = 0$, soit $W' = 0$. La solution $\varphi = \text{const.}$ correspond aux surfaces développables. Si W est constant, il en est de même de V' ; on a

$$W = \frac{1}{a}, \quad V' = -a, \quad V'' = 0.$$

L'équation (9)' est une identité. La fonction φ reste arbitraire et l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \varphi(u - av) dv^2$$

convient à toutes les surfaces de révolution.

Nous supposons désormais le produit $(WV' + 1)\varphi'$ différent

de zéro. Alors l'équation (11) donne

$$(11)' \quad \frac{\varphi''}{\varphi'} = - \frac{W'}{WV' + 1} = \text{const.} = m;$$

d'où deux cas à distinguer suivant que m est nul ou différent de zéro.

7. *Premier cas : $m = 0$.* La fonction W se réduit à une constante, la fonction φ est linéaire et l'on peut prendre

$$\varphi = n(u + V), \quad n = \text{const.}$$

L'équation (9)' devient

$$n(WV' + 1) + V'' = 0$$

ou, en intégrant,

$$(9)'' \quad V' + nWV + nV = 0.$$

Si la constante W est nulle, une nouvelle intégration donne

$$V = -n \frac{v^2}{2};$$

d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + n \left(u - n \frac{v^2}{2} \right) dv^2,$$

que l'on peut mettre sous la forme plus simple

$$(I) \quad ds^2 = du^2 + 2(u - v^2) dv^2,$$

en multipliant u et v par des constantes convenables.

Si la constante W n'est pas nulle, l'intégration de l'équation (9)'' donne

$$V = pe^{-nWv} - \frac{v}{W} + \frac{1}{nW^2},$$

avec une nouvelle arbitraire p . Alors l'élément linéaire peut s'écrire

$$ds^2 = du^2 + n \left(u - \frac{v}{W} + pe^{-nWv} \right) dv^2.$$

On le réduit à la forme plus simple

$$(II)' \quad ds^2 = du^2 + 2 \left(u + av + be^{\frac{2v}{a}} \right) dv^2,$$

où n'entrent plus que deux arbitraires a et b , en multipliant u et v par des constantes convenables. On peut même, quand b n'est pas nul, le réduire à l'unité en profitant des constantes qui s'ajoutent à u et à v .

Remarque. — Les éléments (I) et (II) se présentent dans la recherche des surfaces réglées harmoniques quand on considère celles de ces surfaces qui admettent une génératrice tangente au cercle de l'infini. J'ai démontré, en effet ⁽¹⁾, que leur élément linéaire est réductible soit à la forme (I), soit à la forme (II), qui conviennent l'une et l'autre à des paraboloides imaginaires, sauf pour $b = 0$, cas où le paraboloïde est de révolution. Ce sont là les seules quadriques dont on connaisse *toutes* les déformations, découvertes successivement par M. Weingarten, celles du paraboloïde de révolution d'abord ⁽²⁾, puis celles ⁽³⁾ du paraboloïde (I), enfin celles ⁽⁴⁾ du paraboloïde (II).

8. *Second cas* : $m \neq 0$. Nous poserons, pour abrégér, $t = u + V$. Les deux relations (11)' donnent

$$(12) \quad W' = -m(WV' + 1)$$

$$(13) \quad \varphi = \alpha e^{mt} - \beta,$$

en désignant par α et β deux constantes arbitraires. Substituant cette expression de φ dans l'équation (9)' et tenant compte de l'équation (12) nous avons, pour déterminer V et W , le système

$$(11)'' \quad V'' + m\beta(WV' + 1) = 0,$$

$$(12) \quad W' + m(WV' + 1) = 0.$$

L'hypothèse $\beta = 0$ donne $V'' = 0$, d'où l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{m(u-av)} dv^2,$$

qui correspond à des surfaces à courbure totale constante.

⁽¹⁾ *Determination des surfaces harmoniques réglées* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. CX, p. 223; 1890).

⁽²⁾ *Journal de Crelle*, t. LIX, p. 382; 1861.

⁽³⁾ *Göttinger Nachrichten*; 1887.

⁽⁴⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 796; 1891.

Soit donc désormais $\beta \neq 0$. Le système ci-dessus entraîne

$$V'' - \beta W' = 0$$

ou bien, en appelant $-2q\gamma$ une constante d'intégration,

$$(14) \quad V' = \beta(W - 2\gamma).$$

Substituons cette expression de V' dans l'équation (12); nous aurons

$$(15) \quad \frac{W'}{(W-r)^2 + n^2} = -m\beta, \quad n^2 = \frac{1}{\beta} - \gamma^2.$$

Il faut distinguer, suivant que n est nul ou différent de zéro.

1° Soit $n = 0$. L'équation (15) s'écrit

$$\frac{-W'}{(W-r)^2} = \frac{m}{\gamma^2};$$

on en déduit

$$\frac{1}{W-r} = \frac{m\gamma}{\gamma^2}.$$

La relation (14) donne alors

$$V = \frac{1}{m} \log v - \frac{r}{\gamma},$$

et la formule (13) devient

$$z = x v e^{m(u - \frac{v}{\gamma})} - \frac{1}{\gamma^2}.$$

Nous avons négligé deux constantes additives sans importance. L'élément linéaire auquel nous arrivons peut être simplifié et mis sous la forme

$$(III) \quad ds^2 = du^2 + (v e^{u+v} - 1) dv^2.$$

L'intégrale quadratique correspondante est

$$I = 2pq + \left[\frac{(v+1)e^{u+v}}{v e^{u+v} - 1} - 2 \right] q^2 = \text{const.}$$

2° Soit maintenant $n \neq 0$. De l'équation (15) on tire

$$W - r = -n \tanh mn \beta v.$$

La relation (11) donne alors

$$V = -\beta \gamma v + \frac{1}{m} \log \cos mn \beta v,$$

et la formule (13) devient

$$\varphi = \alpha \cos mn \beta v e^{m(u - \beta \gamma v)} - \beta.$$

L'élément linéaire cherché est donc

$$ds^2 = du^2 + [\alpha \cos mn \beta v e^{m(u - \beta \gamma v)} - \beta] dv^2.$$

Si γ est nul, on peut le ramener à la forme plus simple

$$(IV) \quad ds^2 = du^2 + (e^u \cos v - 1) dv^2,$$

et l'intégrale quadratique correspondante est

$$I = 2pq - \frac{e^u \sin v}{e^u \cos v - 1} q^2 = \text{const.}$$

Si γ n'est pas nul, il subsiste une constante arbitraire dans l'expression définitive de l'élément linéaire

$$(V) \quad ds^2 = du^2 + (e^{u+v} \cos av - a^2 - 1) dv^2, \quad a(a^2 + 1) \neq 0,$$

et l'intégrale quadratique correspondante est

$$I = 2pq + \frac{q^2}{a^2 + 1} \left[\frac{e^{u+v} (\cos av - a \sin av)}{e^{u+v} \cos av - a^2 - 1} - 2 \right] = \text{const.}$$

On sait que la connaissance de l'intégrale quadratique fournit le changement de variables propre à ramener l'élément linéaire à la forme harmonique.

9. Nous terminerons par une observation relative aux enveloppes des familles de géodésiques spéciales. Si l'élément linéaire est donné sous la forme

$$du^2 = (U - V)(U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2),$$

chaque famille de géodésiques spéciales sera représentée par l'équation différentielle

$$\frac{U_1 du}{\sqrt{U - a}} + \frac{V_1 dv}{\sqrt{a - V}} = 0,$$

où la lettre a représente un nombre déterminé, variable d'une famille à l'autre.

D'après cette équation, on pourrait être tenté de croire que toutes les courbes d'une famille sont tangentes aux lignes de la surface représentées par l'une ou l'autre des équations

$$U - a = 0, \quad V - a = 0.$$

Car si u_0 , par exemple, est une racine de la première, pour $u = u_0$ l'équation différentielle donne *en général* $du = 0$, en sorte que les géodésiques de la famille seront tangentes à la courbe de paramètre u_0 . Mais il importe de remarquer que si u_0 annule la fonction U_1 et fait acquérir une valeur finie au rapport $U_1 : \sqrt{U - a}$, on n'est plus en droit d'affirmer que du soit nul. Les géodésiques de la famille spéciale peuvent n'avoir pas d'enveloppe. C'est précisément ce qui a lieu pour les surfaces du second degré. Leur élément linéaire étant mis (en coordonnées elliptiques ou paraboliques) sous la forme

$$ds^2 = (u - c)(U_1^2 du^2 + V_1^2 dv^2),$$

où U_1 et V_1 ont des expressions bien connues, c'est en faisant $a = 0$ dans l'équation

$$\frac{U_1 du}{\sqrt{u - a}} + \frac{V_1 dv}{\sqrt{a - c}} = 0$$

qu'on obtient les génératrices rectilignes, qui sont des géodésiques sans enveloppe. Les coefficients de du et de dv restent finis quand on fait soit $u = 0$, soit $c = 0$.

NOUVELLE CONTRIBUTION AU PROBLÈME DU HUITIÈME POINT COMMUN A TROIS QUADRIQUES. SON IDENTITÉ AVEC UN PROBLÈME PLAN :

Par M. H. PICQUET.

1. Dans le premier Volume de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, p. 12, M. Zeuthen, en réponse à une question de M. Poincaré, fait un rapide historique du problème du huitième point commun aux quadriques qui passent par sept points donnés. On

y voit que ce sujet n'a pas été traité par moins de onze auteurs, dont les travaux, sauf ceux de M. P. Serret, ont tous été publiés à l'étranger, et la plupart en langue étrangère. Cette circonstance, rapprochée des raisons pour lesquelles la question a été de nouveau soulevée, m'engage à rappeler dans un recueil français une des solutions que j'en ai indiquées.

En 1871, j'ai donné au *Journal de Crelle* (t. 73, p. 365) une première construction du huitième point, dont le caractère linéaire fut à tort contesté par Borchardt, comme je l'établis en 1885, en même temps que j'envoyais à ce recueil (t. 99, p. 225) une seconde solution, plus simple que la première et que je vais résumer.

2. *Construction.* — Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points donnés.

1° Dans le plan 5 6 7 joindre le point 5 à deux des trois couples de sommets opposés du quadrilatère complet résultant de l'intersection de ce plan avec le tétraèdre 1 2 3 4, et prolonger ces deux couples de droites jusqu'à la droite 6 7, sur laquelle elles déterminent deux couples de points a, a' et b, b' . Mener par le point 6 une droite quelconque qui coupe le couple $(5a, 5a')$ aux points c et c' ; joindre bc qui coupe $5a'$ en d et $b'e'$ qui coupe $5a$ en d' . La droite dd' détermine sur 6 7 un point α .

2° Opérer de même dans les plans 4 6 7 et 3 6 7 avec la droite 6 7 et respectivement les points 4 et 3, ce qui donne sur cette droite deux nouveaux points β et γ .

3° Le plan P mené par 6 7 et formant avec les trois précédents un rapport anharmonique égal à celui des quatre points 7, α, β, γ passe par le point cherché.

4° Les mêmes constructions, répétées deux fois, en substituant à la droite 6 7 les droites 4 5 et 2 3, par exemple, déterminent le point 8 par l'intersection de trois plans. Mais on peut aussi opérer comme il suit dans le plan P.

Figurer sur ce plan les traces D_1, D_2, D_3 du trièdre formé par les trois droites 1 4, 2 4, 3 4 et les traces $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ du trièdre formé par les trois droites 1 5, 2 5, 3 5 (deux triangles homologues). Chercher le point d'intersection de la droite 6 7 et de D_1 que l'on joindra par une droite G_1 au point d'intersection de D_2 et D_3 ;

chercher de même le point d'intersection de $G_1 G_2$ et de Δ_1 que l'on joindra par une droite G_2 au point d'intersection de Δ_2 et Δ_3 ; la droite qui joint les points $(G_1 G_2)$ et $(D_1 \Delta_1)$ passe par le point 8.

La même construction, répétée une fois en permutant les côtés du triangle $D_1 D_2 D_3$ et de la même manière ceux du triangle $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, donne une seconde droite passant par le point 8.

3. Parmi les autres solutions du même problème, je veux retenir celle que M. Reye a publiée dans le tome suivant du *Journal de Crelle* (t. 100, p. 487) (1). Elle diffère complètement de la précédente, en ce sens surtout qu'elle opère toujours dans l'espace. A première vue, elle paraît plus simple; il y a lieu toutefois de se demander si, en détaillant, comme pour la mienne, chaque élément de la construction on n'arriverait pas à l'opinion contraire. M. Émile Lemoine pourrait seul nous le dire, grâce à ses procédés géométrographiques. La voici :

Avec six des sept points donnés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 former trois couples 1 2, 3 4, 5 6. Par les points i, k d'un de ces couples mener deux transversales rencontrant les deux droites sur lesquelles sont les deux autres couples. Mener par 7 une transversale (ik) qui coupe les deux précédentes. On a ainsi trois droites (1 2), (3 4), (5 6) passant par le point 7 et formant les arêtes d'un trièdre.

Chercher les points d'intersection des droites (1 2), (3 4), (5 6) avec les faces respectivement opposées de ce trièdre, et couper le trièdre par le plan de ces trois points.

On obtient ainsi un triangle dont les côtés rencontrent respectivement les droites (1 2), (3 4), (5 6) en ces trois points et déterminent avec elles trois plans passant par le point cherché.

M. Reye termine en faisant observer que, dans le cas où quatre des points donnés sont dans un même plan, sa solution s'applique encore, mais qu'il y en a une plus simple. Je ne sais s'il l'a publiée ailleurs, mais elle est effectivement si simple qu'il est aussitôt fait de la donner que d'en parler.

Le plan P des quatre points et le plan Q qui passe par les trois

(1) M. Reye glisse légèrement sur l'historique de la question. Suivant lui, elle a été traitée, *pour parler court*, par Caspary et Schröter, qui ont pris pour point de départ les travaux de Hesse, et sa solution est la troisième. On voit que les géomètres non allemands n'existent pas pour le savant professeur de Strasbourg.

autres forment en effet une quadrique passant par les sept points; le huitième point est donc dans l'un des deux plans. Les coniques passant par les quatre premiers points déterminent sur la droite PQ une involution dont deux couples de points conjugués s'obtiennent immédiatement, et comme les couples de points de cette involution sont ceux où la droite coupe toutes les quadriques du système, il en résulte que les coniques de ces quadriques dans le plan Q, lesquelles passent par trois points et sont conjuguées à deux points fixes sur la droite PQ (quatrième condition linéaire), passent par un quatrième point. D'où la construction :

Joindre, dans le plan P, 1 2 et 3 4 qui donnent a et a' sur la droite PQ; joindre de même 1 3 et 2 4 qui donnent b et b' . Joindre, dans le plan Q, 5 6 qui donne c sur PQ; construire (par la règle) ⁽¹⁾, le sixième point c' de l'involution aa' , bb' , c ; la droite $7c'$ passe par le point cherché. Joindre de même 5 7 qui donne d sur PQ; la droite $6d'$ achève de déterminer le point 8.

4. M. Poincaré a aussi demandé dans l'*Intermédiaire* la solution du problème du neuvième point d'un faisceau de cubiques planes. M. Zeuthen, lui répondant, a indiqué une solution de Chasles (*Comptes rendus*, t. XLI) et une solution antérieure de Weddle et Hart (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. VI). Je croyais, pour ma part, que ce problème avait donné lieu à autant de recherches que le précédent ⁽²⁾; mais une chose m'étonne davantage, c'est que personne n'ait fait remarquer leur identité complète. C'est ce qui semble du moins résulter de ce fait que le rapprochement des deux questions, qui sans doute n'est pas fortuit, n'a pas été en même temps une occasion de souligner leur identité qui est absolue, comme je vais le prouver et comme je l'ai observé depuis longtemps.

5. Considérons les cubiques planes passant par huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et d'un point S pris sur une quadrique (Q), projetons-les coniquement sur cette quadrique, après avoir pris soin de faire passer la surface par les droites qui joignent le point S

⁽¹⁾ Voir ma *Géométrie analytique*, p. 362.

⁽²⁾ A vrai dire, il ne faut pas compter la solution anglaise qui n'est ni linéaire ni projective et a recours notamment à l'emploi de quatrièmes proportionnelles.

à deux des huit points, 1 et 2 par exemple. Chaque cône projectif, coupant la quadrique suivant deux génératrices, la coupera en outre suivant une quartique (C).

On sait qu'il existe deux espèces de quartiques gauches : une quartique de la première espèce (biquadratique gauche) est l'intersection commune d'une infinité de quadriques ; elle est coupée en deux points, sur chacune de ces surfaces, par toute génératrice de la surface ; au contraire, par une quartique de la seconde espèce il ne passe qu'une quadrique et les génératrices d'un système rencontrent la courbe en un point, tandis que celles de l'autre système la rencontrent en trois points.

Or, il est aisé de voir que la quartique (C) est rencontrée deux fois par toute génératrice de la quadrique (Q). Cette génératrice rencontre, en effet, l'une des deux génératrices S_1, S_2 , la première par exemple, et comme elle coupe en trois points le cône projectif de l'une des cubiques planes, que d'ailleurs ces trois points doivent se trouver sur l'intersection du cône et de la quadrique Q, il en reste deux sur la quartique C, laquelle est, par suite, une biquadratique gauche.

Ainsi, à toutes les cubiques planes données, correspondent sur la quadrique les biquadratiques passant par le point $S^{(1)}$ et les projections $3', 4', 5', 6', 7', 8'$ des points donnés 3, 4, 5, 6, 7, 8. Si l'on admet que toutes les quadriques qui passent par ces sept points passent par un huitième point g' , les biquadratiques suivant lesquelles elles coupent la quadrique Q passeront elles-mêmes par ce point et les cubiques auront dans leur plan un neuvième point commun g , projection conique de g' .

On démontrerait d'une façon analogue que, si l'on admet le théorème sur les cubiques, la représentation plane des figures tracées sur une quadrique permet d'en conclure la proposition relative aux quadriques qui passent par sept points ; d'où il suit que les deux propositions sont identiques.

6. Il résulte de ce qui précède que chacune des constructions connues du huitième point commun à trois quadriques permet de trouver le neuvième point d'un faisceau de cubiques planes.

(¹) Sans quoi, le cône qui les projette serait du quatrième degré.

Comme il est préférable de ramener le problème de l'espace au problème plan, je vais donner une nouvelle solution du huitième point commun à trois quadriques, en m'appuyant sur la solution du problème plan.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 les sept points donnés, et (D) la droite d'intersection des plans (1 2 3), (4 5 6). La droite (2 3) coupe D en a ; je joins (a 4). De même la droite (5 6) coupe (D) en b ; je joins (b 1). Les deux couples de droites (b 1) (2 3) et (a 4) (5 6), qui constituent deux coniques ayant une corde commune ab sur la droite d'intersection de leurs plans, déterminent avec le point 7 une quadrique (Q) dont le plan tangent en 7 est défini par les deux droites menées par ce point et rencontrant, la première les génératrices de même système (1 b), (4 a), la seconde les génératrices de l'autre système (2 3), (5 6).

Soient $7'$ et $7''$ les traces de ces deux droites sur le plan (1 2 3); soient 4', 5', 6' les projections sur ce plan des points 4, 5, 6 vus du point 7; soit 8' le neuvième point commun dans ce plan à toutes les cubiques qui passent par les points 1, 2, 3, 4', 5', 6', $7'$, $7''$. Le point 8 cherché est la projection sur la quadrique (Q) du point 8' vu du point 7. D'où la construction suivante :

Tracer la droite d'intersection des plans (1 2 3), (4 5 6); joindre (2 3) qui coupe cette droite en a et tracer (a 4); joindre (5 6) qui coupe cette droite en b et tracer (b 1). Mener par 7 les deux droites 7 [(1 b) (4 a)] et 7 [(2 3) (5 6)] dont les traces sur le plan (1 2 3) sont $7'$ et $7''$.

Projeter du point 7 sur le même plan les points 4, 5, 6, en 4', 5', 6'. Construire dans ce plan le neuvième point 8' commun aux cubiques qui passent par 1, 2, 3, 4', 5', 6', $7'$, $7''$. Joindre 7 8' et chercher le second point d'intersection de cette droite avec la quadrique déterminée par le point 7 et les couples de droites [(1 b) (2 3)], [4 a , 5 6].

A cet effet, considérer le plan passant par (7 8') et l'une des génératrices issues de 7, 7 [(1 b) (4 a)] par exemple. Ce plan coupe la quadrique suivant une autre droite, qui est celle qui joint ses points d'intersection avec les génératrices (2 3) et (5 6); et cette droite rencontre la droite (7 8') au point cherché.

A défaut d'autre mérite, cette solution a tout au moins celui d'affirmer l'identité des deux problèmes. Celui du neuvième point

commun aux cubiques planes est d'ailleurs très simple dans ce cas et se ramène immédiatement, vu la situation particulière des huit points, à celui du quatrième point commun à deux coniques déterminées chacune par cinq points dont trois leur sont communs.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1894.

PRÉSIDENTE DE M. PICQUET.

Communications :

M. LAISANT : *Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques.*

M. GENTY adresse une *Note sur des couples de surfaces applicables.*

M. KOENIGS fait la Communication suivante :

Sur un mouvement particulier d'un point dans le plan.

Je pose le problème du mouvement d'un point dans un plan, en le supposant attiré par deux axes rectangulaires en raison inverse du cube des distances. Les équations du mouvement

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{A}{x^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{B}{y^3}$$

s'intègrent immédiatement et donnent

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{A}{x^2} + \alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{B}{y^2} + \beta;$$

$$(3) \quad x^2 = \alpha(t + \alpha')^2 - \frac{A}{\alpha}, \quad y^2 = \beta(t + \beta')^2 - \frac{B}{\beta}.$$

Les quantités α' , β' , α , β sont des constantes; on peut disposer des données initiales de sorte que α , β soient indifféremment positives ou négatives.

L'élimination du temps entre les équations (3) donne une équation

tion du quatrième degré dont l'ensemble des termes du plus haut degré est

$$\left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta}\right)^2;$$

toutes les trajectoires pour lesquelles on a $\alpha\beta < 0$ sont des courbes fermées.

On pourrait s'attendre de prime abord à voir le mobile décrire périodiquement la courbe fermée. Mais le temps est lié algébriquement à x et à y ; le mouvement périodique est impossible.

Supposons $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. L'équation

$$\alpha(t + x')^2 - \frac{\Lambda}{\alpha} = 0$$

admet deux racines réelles τ' et $\tau > \tau'$. Pour que la valeur de x^2 soit positive, il faut que t soit compris entre τ' et τ . Donc *le temps dans ce problème ne peut dépasser la valeur τ .*

La raison de ce fait est facile à comprendre. Un mouvement peut être légitimement continué au delà d'une époque τ à la condition expresse que les valeurs de $x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$ à cette époque τ fournissent les éléments initiaux acceptables d'un mouvement qui sera le prolongement du mouvement antérieur à l'époque τ . Or ici, pour $t = \tau$, on voit que la vitesse et l'accélération sont infinies; on ne peut donc en aucune manière continuer le mouvement au delà de l'époque τ .

Dans un article inséré au tome X du Bulletin de la Société, M. Gascheau a consacré un article à un problème de Poisson sur l'attraction par un centre fixe en raison inverse du cube de la distance. M. Gascheau a complètement méconnu le principe que je viens d'énoncer. La rédaction du Bulletin a fait suivre cet article d'une Note où elle formule des réserves au sujet de la Note de M. Gascheau; mais il faut bien avouer que cette Note elle-même est gravement fautive, quand elle allègue qu'un corps attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance et tombant en ligne droite sur ce centre fixe rebondira sur lui après la chute pour revenir au point de départ. En réalité, lors de la chute, la force et la vitesse deviennent infinies et l'on n'a plus le droit de continuer le mouvement.

Si l'on envisage le mouvement rectiligne d'un point attiré par un centre fixe proportionnellement à la puissance $(m - 1)^{\text{ième}}$ de la distance, où $0 < m < 1$, on reconnaît que la chute a lieu au bout d'un temps fini; la vitesse est finie à l'instant de la chute, mais l'accélération devient infinie. Dans ces conditions, il n'est plus permis d'outrepasser l'époque de la chute.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée.

Étant donnée une conique S , une courbe est *autopolaire* par rapport à S quand elle est à elle-même sa polaire réciproque.

1° Il est facile de former l'équation générale des coniques Σ autopolaires par rapport à S ; cette équation contient deux paramètres u et v .

2° Si l'on établit entre u et v une relation, la conique Σ enveloppe une courbe autopolaire par rapport à S . Réciproquement toute courbe autopolaire peut être obtenue de cette façon.

On remarquera l'analogie avec les anallagmatiques de M. Moutard.

Ces considérations, que je développerai ultérieurement, peuvent s'étendre à l'espace.

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1894.

PRÉSIDENTE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Lecornu : *Sur la discontinuité en Mécanique.*

M. Fouret : *Sur le nombre des plans tangents qu'on peut mener à une surface par une droite qui y est située.*

M. D. André : *Sur certaines suites récurrentes.*

M. Touche : *Sur l'équation de continuité en Hydrodynamique.*

M. Humbert : *Sur les fonctions abéliennes intermédiaires.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE DE M. ARNOUX
CONCERNANT L'ÉTUDE DES ESPACES ARITHMÉTIQUES HYPERMAGIQUES;

Par M. C.-A. LAISANT.

Préliminaires. — L'un de nos collègues de la Société mathématique, M. Arnoux, ancien officier de marine, s'est livré depuis de longues années à des recherches curieuses sur l'étude des carrés magiques, à laquelle il a donné une extension, fort remarquable à mon avis. Les principes de ses méthodes se trouvent développés dans un volume, actuellement sous presse, intitulé : *Arithmétique graphique : les espaces arithmétiques hypermagiques*, et qui sera probablement publié dans quelques semaines. L'auteur, qui vit dans une petite commune des Basses-Alpes, en dehors du mouvement mathématique contemporain, a bien voulu faire appel à mon amitié pour me demander de l'aider dans la rédaction de ce volume; j'ai donc été conduit à étudier ses méthodes avant qu'elles n'aient été soumises au public, et il m'a semblé intéressant d'en faire connaître la substance à la Société mathématique.

Il y a en effet une telle originalité, une telle puissance d'invention dans les méthodes dont il s'agit, que je serais bien étonné si l'Arithmétique n'arrivait pas quelque jour à les utiliser, soit pour obtenir des démonstrations plus simples de vérités connues déjà, soit pour découvrir des vérités nouvelles.

Pour faire comprendre comment l'auteur pose le problème de l'hypermagie, il faut tout d'abord reproduire quelques définitions qui sont à la base de sa méthode; il importe de bien comprendre en effet que les constructions de carrés magiques, ou d'espaces magiques en général, auxquelles il s'est appliqué, n'ont guère été pour lui qu'une occasion d'utiliser des idées générales, ayant une bien autre portée qu'un simple amusement arithmétique.

Espaces arithmétiques modulaires. — Si l'on imagine une ligne droite sur laquelle sont placés m objets (ou m nombres)

équidistants, et si la figure formée par ces objets se reproduit indéfiniment sur le prolongement de cette droite dans les deux sens, la disposition qui en résulte est appelée par l'auteur un *espace arithmétique à une dimension, de module m* . Dans un tel espace modulaire infini, tous les faits constatés, toutes les nouvelles figures tracées dans un segment quelconque, pareil à celui qui a servi de point de départ, pourront être reproduits dans celui-ci, qui sera en quelque sorte l'*image* de la succession infinie dont nous venons de parler. On représentera ainsi l'espace modulaire infini par une figure comprenant m objets seulement.

Par exemple, soit $m = 5$ et supposons les cinq objets a, b, c, d, e composant l'espace modulaire à une dimension

... $a b c d e a b c d e a b c d e a b c d e a b c d e$...

Si, partant de la première position a pour origine, en prenant pour unité les intervalles consécutifs, nous suivons une *marche* régulière dont le *pas* soit 1, nous trouverons les objets dans l'ordre écrit ci-dessus, c'est-à-dire $a b c d e$ indéfiniment reproduits. Une marche de *pas* 2 donnerait $a c e b d$, le *pas* 3, $a d b e c$, etc... Le *pas* 5, seul, donnerait dans cet exemple, $a a a \dots$, ou $b b b \dots$, c'est-à-dire des objets identiques à celui d'où l'on est parti; et toujours la période ainsi obtenue pourra être figurée dans le premier segment $a b c d e$.

Une marche qui rencontre tous les objets différents est dite une *marche magique*. Une marche dont le pas serait 5 ou un multiple de 5 (en général m ou un multiple de m) serait une *marche des identiques*, ou *d'invariance*.

On comprend déjà toute l'analogie qui rattache ces considérations graphiques à la théorie des congruences, que M. Arnoux considère toujours comme de simples équations où l'on doit faire $m = 0$. On voit aussi qu'il y aura une distinction capitale à établir entre les cas où le module est premier et ceux où il est composé. Nous ne nous occuperons à peu près que du cas de m premier, le plus simple de beaucoup, dans cette exposition sommaire.

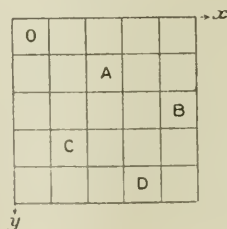
Si, au lieu d'un segment sur lequel sont portés m objets, nous supposons m^2 objets placés sur m segments pareils, parallèles et

équidistants, par exemple dans les m^2 cases d'un carré, et si par la pensée nous imaginons ce carré reproduit identiquement dans le sens de ses deux dimensions, et dans toute l'étendue du plan auquel il appartient, nous aurons de même un espace arithmétique à deux dimensions, de module m , qui trouvera sa représentation ou son image, dans le carré primitif. Une case quelconque de cet espace aura deux coordonnées x, y qui pourront l'une et l'autre être considérées comme plus petites que m , puisqu'il ne faudra jamais prendre que les restes des divisions par m , pour tout ramener au premier carré.

On voit encore qu'un cube de m^3 cases pourra représenter un espace arithmétique de module m à trois dimensions, exactement de la même manière. Un espace à quatre dimensions serait figuré par une collection de m cubes pareils, supposés par exemple rangés en file. L'une quelconque des m^4 cases aurait *quatre* coordonnées, les trois premières, x, y, z par exemple, indiquant sa position dans son cube, et la quatrième t , le numéro de ce cube dans la file des m cubes. Il est facile de s'élever ainsi à la conception d'un espace arithmétique modulaire à autant de dimensions qu'on voudra, et à la possibilité de représenter matériellement de tels espaces. Nous nous bornerons exclusivement ici aux espaces à deux dimensions, qui suffisent pour donner une idée des principes essentiels, principes faciles à étendre ensuite aux espaces supérieurs.

Directions dans un espace à deux dimensions, de module premier. — Reprenons, pour plus de simplicité, l'exemple

Fig. 1.



de $m = 5$ et supposons un carré de 25 cases. Si, partant de la case origine O située à gauche et en haut, nous choisissons une autre

case quelconque du carré, A, ayant par exemple pour coordonnées $x = 2, y = 1$, et si nous traçons la droite OA sur l'espace indéfini, par les centres des deux cases, nous obtiendrons, en marchant sur cette droite du même pas régulier OA, la succession des cases O, A, B, C, D, indéfiniment reproduites dans le même ordre. On trouvera donc 5 cases différentes, et 5 cases seulement, en suivant cette marche. Il est aisé de se rendre compte de deux faits : le premier, c'est qu'il en serait de même si l'on partait de toute autre case que O ; le second, c'est que, en partant de O, et marchant du pas OA, ou OB, OC, OD, on retombera toujours sur les 5 mêmes cases dans un certain ordre. C'est à un tel groupe, répondant à des cases qui sur l'espace indéfini se trouveraient en ligne droite, qu'on donne le nom de *ligne arithmétique*, de direction donnée; et l'ensemble des lignes arithmétiques de même direction, obtenues en partant des diverses cases, forme une *direction arithmétique*.

On voit, en partant de l'origine O, que la même case ne peut appartenir à deux directions différentes; comme il y a 25 cases en tout (m^2 en général) et que chaque direction partant de O rencontre 4 cases ($m - 1$ en général) non compris O, le nombre des directions possibles est donc $\frac{24}{4} = 6$ (en général $\frac{m^2-1}{m-1} = m + 1$).

Une direction quelconque est caractérisée par les coordonnées a, b de la première case à atteindre en partant de l'origine, et que M. Arnoux représente par le symbole $ax + by$. Il désigne en outre par $((m))$ l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ..., $m - 1$ inférieurs à m , et en écrivant $((m))(ax + by)$ il a l'expression d'une direction arithmétique de l'espace. Par exemple, la direction figurée plus haut s'écrirait $((5))(2x + 1y)$ et exprimerait qu'on rencontre successivement les cases dont les coordonnées sont :

$$\begin{array}{lllll} x. & 0.2 \equiv 0, & 1.2 \equiv 2, & 2.2 \equiv 4, & 3.2 \equiv 1, & 4.2 \equiv 3 \\ y. & 0.1 \equiv 0, & 1.1 \equiv 1, & 2.1 \equiv 2, & 3.1 \equiv 3, & 4.1 \equiv 4 \end{array} \quad (\text{mod } 5).$$

Directions magiques, espaces hypermagiques. — Si l'on suppose que le carré représentatif de l'espace à deux dimensions de module m ait ses cases remplies par les m^2 nombres différents

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots, \quad m^2 - 1.$$

suivant une disposition quelconque, la somme de tous ces objets est $\frac{m^2(m^2-1)}{2}$. Le quotient de cette somme par m est

$$\frac{m(m^2-1)}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{2};$$

c'est ce qu'on appelle la *somme magique* correspondant au module m .

Ceci posé, si chaque ligne comprise dans une direction arithmétique déterminée, dans le carré dont nous venons de parler, contient des éléments dont la somme soit précisément $\frac{(m-1)m(m+1)}{2}$, on dira que cette direction est *magique*. Et un espace à deux dimensions est *hypermagique*, quand il présente le plus grand nombre possible de directions magiques.

On reconnaît que la définition ordinaire des carrés magiques revient à dire que les *directions* $((m))(1x + 0y)$ et $((m))(0x + 1y)$ sont magiques, et qu'il en est de même des deux *lignes* diagonales du carré.

Si les quatre *directions* $((m))(1x + 0y)$, $((m))(0x + 1y)$, $((m))(1x + 1y)$, $((m))(1x - 1y)$ sont magiques, on a un carré diabolique, selon la définition d'Édouard Lucas, c'est-à-dire un carré magique qui reste encore magique si, après l'avoir sectionné verticalement ou horizontalement, on fait permuter entre elles les deux parties ainsi obtenues.

Position fondamentale principale. — Reprenons encore l'exemple $m = 5$, et supposons que nous ayons écrit les 25 nombres 0, 1, 2, ..., 24 dans leur ordre sur 5 lignes horizontales de manière à former un carré

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Cette disposition, qui s'étend d'elle-même à un module quelconque, est ce que l'auteur appelle la *position fondamentale principale* du carré de module 5.

Cette position fondamentale, si nous employons pour écrire les nombres le système de numération de base 5, deviendra

00	01	02	03	04
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

Méthode des abaqes. Transformation en quinconce. — En séparant les deux chiffres, dans la figure précédente, on obtient les deux Tableaux ;

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right. (\beta)$$

auxquels M. Arnoux donne le nom d'*abaques*.

Dans le premier abaque, toute direction, à l'exception de celle des x , rencontrera les cinq nombres différents 0, 1, 2, 3, 4 ; de même dans le second, à l'exception de la direction des y . Il en serait encore de même si l'on formait une permutation quelconque des colonnes, ne modifiant pas le premier abaque, ou des lignes horizontales ne modifiant pas le second.

Donc la position fondamentale principale, et toutes celles qui s'ensuivent par permutation des lignes ou des colonnes, sont telles que toutes les directions sont magiques, sauf celles des x et des y . En effet, on aura pour somme des éléments rencontrés par une ligne de direction quelconque (sauf les deux exceptions) : $(0 + 1 + 2 + 3 + 4)5 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4)$, et, en général, $\frac{(m-1)m}{2}m + \frac{(m-1)m}{2} = \frac{(m-1)m(m+1)}{2}$, c'est-à-dire précisément la somme magique, qui est 60 dans notre exemple.

La position fondamentale principale donne donc un carré hypermagique, et il en est de même de toutes les positions fondamentales obtenues par permutation, dont nous venons de parler ; mais il faut le modifier si l'on veut lui donner la disposition

habituelle des carrés magiques. Pour cela, on écrira

$$\xi = ax + by, \quad \eta = a'x + b'y,$$

les deux cases $ax + by$ et $a'x + b'y$ ne devant pas appartenir à une même direction en partant de la case origine, et l'on formera le carré nouveau en prenant successivement les éléments contenus dans les cases

$$\begin{array}{ccccccc} 0.\xi + 0.\eta, & 1.\xi + 0.\eta, & \dots & (m-1).\xi + 0.\eta, \\ 0.\xi + 1.\eta, & 1.\xi + 1.\eta, & \dots & (m-1).\xi + 1.\eta, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0.\xi + (m-1).\eta, & \dots & \dots & (m-1).\xi + (m-1).\eta, \end{array}$$

pour avoir les différentes lignes horizontales du nouveau carré. Cela donne lieu à un calcul des plus faciles, et cela correspond en somme à la formation d'une figure construite dans l'espace modulaire indéfini, en forme de quinconce, en partant des deux bases $ax + by$, $a'x + b'y$.

Soit graphiquement, soit par un calcul tout à fait simple, il est donc possible de construire des carrés hypermagiques qui offriront toujours *deux* directions non magiques. Ces directions seront les transformées des x et des y dans la transformation qui vient d'être indiquée. Il est visible, en effet, que, dans cette transformation, toute ligne droite correspond à une droite, toute direction à une direction, et réciproquement.

Si a , b , a' , b' sont choisis de telle sorte que $1\xi \pm 1\eta$ ne soit dirigé ni suivant les x , ni suivant les y , le carré obtenu sera diabolique. Nous nous bornerons à donner ici le résultat obtenu par la transformation $\xi = 2x + 1y$, $\eta = 1x + 2y$:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 7 & 14 & 16 & 23 & \rightarrow \xi \\ 11 & 18 & 20 & 2 & 9 & \\ 22 & 4 & 6 & 13 & 15 & \\ 8 & 10 & 17 & 24 & 1 & \\ 19 & 21 & 3 & 5 & 12 & \\ \downarrow & & & & & \\ \eta & & & & & \end{array}$$

Les seules directions non magiques sont données par $1\xi + 2\eta$ et $2\xi + 1\eta$.

Les abaques $(\alpha)(\beta)$ ci-dessus nous ont servi à établir la démonstration, et devraient subir des transformations correspondantes, devenant ainsi (α') et (β') . Le carré hypermagique ci-dessus pourrait se représenter alors symboliquement par $\hat{5}(\alpha') + (\beta')$ et en général par $m(\alpha') + (\beta')$; cela signifierait qu'à chaque élément de (β') il faut ajouter l'élément correspondant de (α') multiplié par m , pour former le carré définitif. Toute direction magique de ce dernier correspond à une direction magique dans chacun des abaques, d'après la définition donnée pour les espaces à une dimension. Toute direction non magique correspond à une direction d'invariance dans l'un des deux abaques.

Pour la *construction* d'un carré hypermagique, les abaques ne sont pas nécessaires, d'après la transformation en quinconce décrite plus haut. Mais pour l'analyse d'un carré déterminé, cette méthode est pour ainsi dire indispensable et fournit un précieux moyen d'investigation.

Il est vraiment digne de remarque que la position fondamentale principale, si simple à écrire, représente un carré hypermagique au plus haut point, et que cette propriété n'ait pas encore été constatée, malgré les innombrables travaux relatifs à cette question. Je crois que cela tient à deux causes : la première, c'est qu'on a plutôt cherché jusqu'ici des procédés souvent très ingénieux qu'une méthode allant au fond des choses, comme celle de M. Arnoux; la seconde, c'est qu'on a constamment écrit les carrés magiques d'une façon peu rationnelle, en y faisant figurer les nombres 1, 2, 3, ..., m^2 , au lieu de 0, 1, 2, ..., $m^2 - 1$. Ce simple changement dans le point de départ était de nature à masquer des propriétés qui deviennent très claires avec cette méthode, et qui amènent tout naturellement à l'emploi du système de numération de base m . Il est bien évident, en effet, qu'un espace magique, avec les définitions courantes, reste magique, et, dans les mêmes conditions, si l'on ajoute ou si l'on retranche à tous les éléments un nombre constant quelconque.

Modules composés. Numération à bases multiples. — Nous ne voulons pas même aborder le problème des espaces à modules composés, beaucoup plus complexe, comme nous l'avons dit,

mais nous tenons à faire ressortir une idée très heureuse, à notre avis, dont M. Arnoux a fait usage pour cette étude.

De même qu'il écrit tous les nombres, de 0 à $m^2 - 1$, au moyen de deux chiffres, lorsque le module m est un nombre premier, de même si m est composé, par exemple, de deux facteurs premiers p, q , il sera possible de représenter un nombre N quelconque inférieur à m^2 , de la manière suivante :

Divisons N par q ; le reste q_1 sera inférieur à q , et le quotient N_1 inférieur à $p^2 q$; on aura $N = N_1 q + q_1$. Divisons N_1 par p ; le quotient N_2 sera inférieur à $p q$ et le reste p_1 inférieur à p ; on aura $N_1 = N_2 p + p_1$. De même $N_2 = N_3 p + p_2$, p_2 étant inférieur à p et N_3 inférieur à q ; posant $N_3 = q_2$, on a donc

$$N = q_2 \cdot p^2 q + p_2 \cdot p q + p_1 \cdot q + q_1.$$

C'est-à-dire que N peut s'écrire avec les *chiffres* p_1, p_2, q_1, q_2 de la manière suivante, qui représente l'expression ci-dessus

$$\begin{array}{cccc} (q) & (p) & (p) & (q) \\ q_2 & p_2 & p_1 & q_1 \end{array}$$

C'est à un semblable système de numération que M. Arnoux a donné le nom de numération *à bases multiples*. On comprend qu'il y a autant de manières d'écrire ainsi un nombre qu'il y a de permutations distinctes des éléments p, p, q, q , et l'on voit aussi comment ces notions peuvent s'étendre au cas où il y a non plus deux facteurs p, q seulement, mais un aussi grand nombre de facteurs qu'on voudra.

Mais nous tenons à terminer cet exposé, que nous aurions voulu pouvoir abréger plus encore, et nous ne pouvons que renvoyer à l'examen du livre de M. Arnoux ceux que de plus complets développements pourraient intéresser.

NOTE SUR DES COUPLES DE SURFACES APPLICABLES;

Par M. E. GENTY.

Dans une Communication récente, M. Caronnet (1) s'est pro-

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, p. 134.

posé de rechercher les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre et telles que la distance des points correspondants soit constante. Il a trouvé deux groupes de telles surfaces; dans le premier groupe, les coordonnées d'un point quelconque dépendent de deux fonctions arbitraires de deux paramètres différents; les surfaces du second groupe sont réglées; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même paramètre et sont applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices correspondantes.

Le regretté Ribaucour a étudié depuis longtemps les surfaces du premier groupe. Dans son *Mémoire* (couronné par l'Académie de Bruxelles) *sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, il a établi le lien étroit qui rattache cette théorie avec celle de la correspondance avec la sphère par orthogonalité des éléments, et il a démontré la proposition remarquable dont voici l'énoncé :

Si les extrémités d'une droite de longueur constante sont les points correspondants de deux surfaces applicables l'une sur l'autre, le plan mené normalement à la corde par son point milieu enveloppe une surface minima.

Nous allons reprendre cette question et montrer avec quelle facilité on peut obtenir les résultats de MM. Ribaucour et Caronnet par les procédés de la Géométrie vectorielle.

Soient ρ et ϖ les vecteurs de deux points correspondants M et P de deux surfaces (S) et (H). Le point O étant l'origine, on peut construire deux nouvelles surfaces (S_1) et (S_2) en menant par le point M une parallèle à OP et en portant sur cette droite, de part et d'autre du point M, deux longueurs égales à OP.

Les surfaces (S_1) et (S_2) auront pour équation vectorielle

$$\varpi_1 = \rho + \varpi,$$

$$\varpi_2 = \rho - \varpi,$$

et, si l'on veut qu'elles soient applicables l'une sur l'autre, on devra satisfaire à la condition

$$T^2(d\rho + d\varpi) = T^2(d\rho - d\varpi)$$

ou

$$S d\rho d\varpi = 0;$$

on voit donc que la surface (S) et la surface (H) devront se correspondre par orthogonalité des éléments.

Si l'on suppose que (H) soit une sphère ayant son centre à l'origine, la distance $M_1 M_2$ de deux points correspondants des surfaces (S_1) et (S_2) sera constante; c'est le résultat obtenu par M. Caronnet.

La recherche de ce groupe de surfaces revient donc à celle des surfaces qui correspondent à la sphère par orthogonalité des éléments. Soit alors

$$d\omega = v_1 du + v_2 dv$$

l'équation différentielle de la sphère unitaire rapportée aux paramètres de ses lignes de longueur nulle; v étant un orienteur, on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T^2 v_1 = 0, \quad T^2 v_2 = 0, \quad S v_1 v_2 = F, \quad V v_1 v_2 = i F v, \\ TV v_1 v_2 = i F, \quad v_{11} = \frac{\partial \log F}{\partial u} v_1, \quad v_{12} = -F v, \quad v_{22} = \frac{\partial \log F}{\partial v} v_2, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v} + F = 0,$$

en désignant par les indices 1 et 2, respectivement, les opérations $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ effectuées sur des vecteurs.

Ceci posé, je dis que le vecteur $\frac{v_1}{F}$ est indépendant de u ; il faut démontrer qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v_1}{S v_1 v_2} \right) = 0$$

ou

$$v_{11} S v_1 v_2 - v_1 (S v_{11} v_2 + S v_1 v_{12}) = 0,$$

et l'on voit tout de suite que cette équation est vérifiée.

On reconnaîtrait de même que le vecteur $\frac{v_2}{F}$ est indépendant de v .

Soit alors ρ le vecteur d'une surface correspondant à la sphère par orthogonalité des éléments; on aura identiquement

$$S d\rho d\omega = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} S \rho_1 v_1 &= 0, & S \rho_2 v_2 &= 0, \\ S \rho_1 v_2 + S \rho_2 v_1 &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières équations peuvent s'écrire

$$S \rho_1 \frac{v_1}{F} = 0, \quad S \rho_2 \frac{v_2}{F} = 0,$$

et donnent immédiatement

$$(3) \quad \begin{cases} S \rho v_1 = FV, \\ S \rho v_2 = FU, \end{cases}$$

U et V étant des fonctions de u et de v , respectivement.

La troisième peut s'écrire

$$\frac{\partial S \rho v_2}{\partial u} + \frac{\partial S \rho v_1}{\partial v} = 2 S \widehat{\rho v_{12}},$$

ou, en tenant compte des équations (1) et (3),

$$(4) \quad S \widehat{\rho} = -\frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} + \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right].$$

Les équations (3) et (4) donnent la solution du problème; si on les résout par rapport à ρ , il vient

$$\rho = V v_2 + U v_1 - \frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} + \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right] v,$$

et alors les surfaces

$$\pi = \rho + l v,$$

$$\pi = \rho - l v,$$

où l est une constante, sont deux surfaces applicables l'une sur l'autre de telle sorte que la distance $M_1 M_2$ de deux points correspondants soit constante.

Si dans l'équation

$$\pi = \rho + l v$$

on regarde l comme un paramètre variable, elle représentera la congruence des droites M_1, M_2 . Je dis que cette congruence est *isotrope* et que le point ρ est un point de sa surface moyenne.

Il faut, pour cela, qu'on ait identiquement

$$S d\rho dv = 0;$$

ce qui donne les trois conditions

$$(5) \quad S \rho_1 v_1 = 0, \quad S \widehat{\rho_2 v_2} = 0,$$

$$(6) \quad S \rho_1 v_2 + S \rho_2 v_1 = 0.$$

Or, si l'on différentie par rapport à u la première des équations (3), il vient

$$S \rho_1 v_1 = - S \rho v_{11} + V \frac{\partial F}{\partial u} = - \frac{\partial \log F}{\partial u} S \rho v_1 + V \frac{\partial F}{\partial u} = 0;$$

on verrait de même qu'on a

$$S \rho_2 v_2 = 0.$$

Si enfin on différentie les équations (3) par rapport à v et par rapport à u respectivement, il vient

$$S v_1 \rho_2 = \frac{\partial(FV)}{\partial v} - S \widehat{\rho v_{12}} = \frac{\partial(FV)}{\partial v} + F S v \rho,$$

$$S \rho_1 v_2 = \frac{\partial(FU)}{\partial u} - S \widehat{\rho v_{12}} = \frac{\partial(FU)}{\partial n} + F S v \rho.$$

et l'équation (6) est aussi vérifiée en vertu de l'équation (4).

Je dis maintenant que le plan moyen de la congruence, c'est-à-dire le plan mené par le point M normalement à v , enveloppe une surface minima.

De la valeur trouvée pour le vecteur ρ du point M de la surface moyenne, on déduit très simplement

$$(7) \quad \begin{cases} \rho_1 = m F v + l v_1, \\ \rho_2 = n F v - l v_2, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$m F = \frac{\partial p}{\partial u} - F V, \quad n F = \frac{\partial p}{\partial v} - F U;$$

$$l = \frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} - \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right],$$

et enfin

$$p = - \frac{1}{2F} \left[\frac{\partial(FU)}{\partial u} + \frac{\partial(FV)}{\partial v} \right].$$

Or l'équation du plan moyen est

$$S(\pi - \rho) v = 0.$$

Si l'on prend les dérivées par rapport à u et par rapport à v , il vient

$$S(\pi - \rho) v_1 = m F,$$

$$S(\pi - \rho) v_2 = n F.$$

En résolvant les trois équations qui précèdent, il vient pour le vecteur du point N de l'enveloppée moyenne

$$\pi = \rho + m v_2 + n v_1.$$

Le vecteur $m v_2 + n v_1$, qui est évidemment tangent à l'enveloppée moyenne, touche aussi la surface moyenne; on a, en effet,

$$S(m v_2 + n v_1)(m F v + l v_1)(n F v - l v_2) = 0.$$

Donc la droite qui joint le point central d'un rayon d'une congruence isotrope au point de contact du plan moyen avec l'enveloppée moyenne engendre une congruence dont les focales sont la surface moyenne et l'enveloppée moyenne.

Si l'on écrit maintenant que les valeurs de ρ_1 et de ρ_2 tirées des équations (7) sont égales, on obtient sans difficulté les relations suivantes

$$(8) \quad \begin{cases} l F + \frac{\partial(n F)}{\partial u} = 0, & l F - \frac{\partial(m F)}{\partial v} = 0; \\ \frac{\partial l}{\partial u} + m F = 0, & \frac{\partial l}{\partial v} = n F. \end{cases}$$

On a d'ailleurs, en tenant compte des relations (1) et (8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial u} &= l v_1 + \frac{\partial m}{\partial u} v_2 + \frac{\partial n}{\partial u} v_1 + n \frac{\partial \log F}{\partial u} v_1 = \frac{\partial m}{\partial u} v_2; \\ \frac{\partial \pi}{\partial v} &= \frac{\partial n}{\partial v} v_1; \end{aligned}$$

donc les lignes de longueur nulle de l'enveloppée moyenne ont pour image sphérique les lignes de longueur nulle de la sphère, ce qui caractérise les surfaces minima.

L'enveloppée moyenne est donc une surface minima; on aurait pu le démontrer encore en vérifiant directement la relation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + p F = 0,$$

qui exprime que le plan $S v \rho = p$ enveloppe une surface minima,

lorsque u et v sont les paramètres des lignes de longueur nulle de la sphère.

L'équation des lignes asymptotiques de l'enveloppée moyenne est

$$S d\pi dv = 0$$

ou

$$S \left(\frac{\partial m}{\partial u} v_2 + \frac{\partial n}{\partial v} v_1 \right) (v_1 du + v_2 dv) = 0,$$

ou enfin

$$(9) \quad \frac{\partial m}{\partial u} du^2 + \frac{\partial n}{\partial v} dv^2 = 0.$$

De même, si v est un vecteur quelconque parallèle à la normale de la surface moyenne, l'équation des lignes asymptotiques de cette surface sera

$$S d\zeta dv = 0.$$

Or on a

$$v \parallel V(mFv + l v_1)(nFv - l_2 v) \parallel m v_2 - n v_1 - l v,$$

et si l'on prend

$$v = m v_2 - n v_1 - l v,$$

on trouve immédiatement, en tenant compte des relations (8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial u} &= \frac{\partial m}{\partial u} v_2 = \frac{\partial \pi}{\partial u}, \\ \frac{\partial v}{\partial v} &= -\frac{\partial n}{\partial v} v_1 = -\frac{\partial \pi}{\partial v}, \end{aligned}$$

de sorte que l'équation des lignes asymptotiques de la surface moyenne est

$$S \left(\frac{\partial m}{\partial u} v_2 du - \frac{\partial n}{\partial v} v_1 dv \right) [(mFv + l v_1) du + (nFv - l_2 v) dv] = 0.$$

En développant le premier membre, on retrouve l'équation (9) : donc les lignes asymptotiques se correspondent sur la surface moyenne et sur l'enveloppée moyenne d'une congruence isotrope.

On obtient les directions principales et les rayons principaux

de courbure de l'enveloppée moyenne en résolvant l'équation vectorielle

$$d\varpi = R dv,$$

ou

$$\frac{\partial m}{\partial u} v_2 du + \frac{\partial n}{\partial v} v_1 dv = R(v_1 du + v_2 dv),$$

ce qui donne

$$\frac{\partial m}{\partial u} du = R dv, \quad \frac{\partial n}{\partial v} dv = R du.$$

Si l'on élimine R entre ces équations, il vient, pour l'équation des lignes de courbure,

$$\frac{\partial m}{\partial u} du^2 - \frac{\partial n}{\partial v} dv^2 = 0.$$

Si, au contraire, on élimine du , dv , il vient

$$R^2 = \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v},$$

ce qui montre de nouveau que l'enveloppée moyenne est bien une surface minima.

Si R et R' sont les rayons principaux de courbure de cette surface, on a

$$RR' = - \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v}.$$

Pour la surface moyenne, l'équation à résoudre prend la forme

$$d\varphi = R d\left(\frac{\varphi}{t}\right)$$

ou

$$(10) \quad (mFv + tv_1)du + (nFv - tv_2)dv = \frac{R}{t} \left(\frac{\partial m}{\partial u} v_2 du - \frac{\partial n}{\partial v} v_1 dv \right) - \frac{R dt}{t^2} v,$$

où l'on a posé

$$t = \bar{v} = \overline{mv_2 - nv_1 - tv} = \sqrt{t^2 - 2mnF}.$$

Si l'on projette l'équation (10) avec les vecteurs $mFv + tv_1$ et $nFv - tv_2$, il vient

$$m^2 F du + (mnF - t^2) dv = \frac{tR}{t} \frac{\partial m}{\partial u} du;$$

$$(mnF - t^2) du + n^2 F dv = \frac{tR}{t} \frac{\partial n}{\partial v} dv.$$

En éliminant du, dv , on obtient pour l'équation aux rayons de courbure principaux

$$\frac{l^2 R^2}{l^2} \frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v} - \frac{l R F}{l} \left(n^2 \frac{\partial m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial n}{\partial v} \right) + l^2 l^2 = 0.$$

Si R_1 et R'_1 sont les racines de cette équation, on a

$$R_1 R'_1 = \frac{l^4}{\frac{\partial m}{\partial u} \frac{\partial n}{\partial v}},$$

d'où

$$R R' R_1 R'_1 = \frac{D^4}{\sin^4 V},$$

en désignant par V l'angle des normales à la surface moyenne et à l'enveloppée moyenne et par D la distance entre les points correspondants de ces deux surfaces.

Remarquons enfin qu'on a

$$S d\omega dv = 0,$$

ce qui montre que l'enveloppée moyenne et la surface ayant pour vecteur v se correspondent par orthogonalité des éléments; on reconnaît d'ailleurs très simplement que la surface ayant pour vecteur $-idv$ n'est autre que la *surface adjointe* de l'enveloppée moyenne; on a, en effet,

$$-idv = V d\omega,$$

ce qui met en évidence la proposition.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 MARS 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Élections :

Sont élus à l'unanimité Membres de la Société : M. George Bruce

Halsted, présenté par MM. Poincaré et Craig; M. Balitrand, présenté par MM. Mannheim et Picquet.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la composition des lois d'erreur de situation d'un point.* *

M. Poincaré : *Sur la question de savoir si les courbes d'un même genre forment une multiplicité continue.*

M. Raffy : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. GOURSAT adresse la Note suivante :

Sur les tangentes à une cubique plane.

Étant donnée une cubique plane sans point double (C), on sait que, par un point M de cette courbe, on peut lui mener quatre tangentes, sans compter celle qui a son point de contact en M; *le rapport anharmonique de ces quatre tangentes reste constant lorsque le point M décrit la cubique (C).* On possède déjà plusieurs démonstrations de cette remarquable propriété; en voici une autre, qui me paraît assez simple.

Prenons sur la cubique (C) deux points quelconques A et B, qui seront supposés fixes, et un troisième point variable M. Si λ et μ désignent les coefficients angulaires des deux droites AM et BM, il y a évidemment entre λ et μ une relation algébrique et du second degré par rapport à chacune des variables, car à une valeur de λ correspondent deux valeurs de μ et inversement. Soit

$$(1) \quad \begin{cases} F(\lambda, \mu) = \lambda^2(A\mu^2 + B\mu + C) \\ \quad + \lambda(A_1\mu^2 + B_1\mu + C_1) + A_2\mu^2 + B_2\mu + C_2 = 0 \end{cases}$$

cette relation, que l'on peut aussi écrire

$$(2) \quad \begin{cases} F(\lambda, \mu) = \mu^2(A\lambda^2 + A_1\lambda + A_2) \\ \quad + \mu(B\lambda^2 + B_1\lambda + B_2) + C\lambda^2 + C_1\lambda + C_2 = 0. \end{cases}$$

Si la droite AM devient tangente en M à la cubique, les deux valeurs correspondantes de μ deviennent égales; les coefficients angulaires des quatre tangentes issues du point A sont donc les

racines de l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} R(\lambda) = (B\lambda^2 + B_1\lambda + B_2)^2 \\ - 4(A\lambda^2 + A_1\lambda + A_2)(C\lambda^2 + C_1\lambda + C_2) = 0. \end{cases}$$

Les coefficients angulaires des tangentes issues du point B sont de même les racines de l'équation

$$(4) \quad \begin{cases} R_1(\mu) = (A_1\mu^2 + B_1\mu + C_1)^2 \\ - 4(A\mu^2 + B\mu + C)(A_2\mu^2 + B_2\mu + C_2) = 0. \end{cases}$$

Tout revient à démontrer que les équations (3) et (4) ont même invariant absolu. Le calcul direct serait un peu long, mais on peut l'éviter comme il suit.

Il est permis évidemment d'effectuer sur λ et sur μ deux substitutions linéaires quelconques, et la proposition sera établie si l'on montre qu'on peut choisir ces deux substitutions linéaires de telle façon que la relation $F(\lambda, \mu) = 0$ soit remplacée par une relation symétrique en λ et μ ; alors, en effet, les deux équations (3) et (4) seront identiques. Soient λ_1 une racine de $R(\lambda) = 0$, et μ_1 la racine double de l'équation $F(\lambda_1, \mu) = 0$; soient de même μ_2 une racine de $R_1(\mu) = 0$, et λ_2 la racine double de l'équation $F(\lambda, \mu_2) = 0$. Posons

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} = \lambda', \quad \frac{\mu - \mu_2}{\mu - \mu_1} = \mu';$$

la relation (1) se change en une nouvelle relation de même forme

$$(5) \quad \begin{cases} f(\lambda', \mu') = \lambda'^2(a\mu'^2 + b\mu' + c) \\ + \lambda'(a_1\mu'^2 + b_1\mu' + c_1) + a_2\mu'^2 + b_2\mu' + c_2 = 0. \end{cases}$$

Pour $\lambda' = 0$, la nouvelle équation en μ' doit avoir une racine double infinie et, de même, pour $\mu' = 0$, l'équation en λ' doit avoir une racine double infinie. Ceci exige que l'on ait $a_2 = b_2 = 0$, $c = c_1 = 0$. La relation (5) est donc de la forme

$$f(\lambda', \mu') = a\lambda'^2\mu'^2 + \lambda'\mu'(b\lambda' + a_1\mu' + b_1) + c_2 = 0.$$

Si aucun des coefficients b, a_1 n'est nul, il suffit de remplacer μ' par $\frac{b}{a_1}\mu'$ pour être ramené à une relation symétrique entre λ' et μ' , et la proposition est établie.

Aucun des coefficients b , a_1 ne peut être nul. Si, par exemple, on avait $b = 0$, l'équation $f(\lambda', \mu') = 0$ aurait, pour $\mu' = 0$, une racine double infinie en λ' , et, pour $\lambda' = \infty$, une racine double nulle en μ' . Les deux droites correspondantes AM et BM rencontreraient chacune la cubique en deux points confondus en M; ce point serait nécessairement un point double. On arrive à la même conclusion en supposant $a_1 = 0$.

M. DEMOULIN adresse la Note suivante :

Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution.

Soient (S) et (S₁) deux surfaces qui se correspondent ponctuellement dans les conditions suivantes : M étant un point quelconque de (S) et M₁ le point qui lui correspond sur (S₁), deux éléments correspondants MM', M₁M'₁ et la normale en M sont parallèles à un même plan.

Est-il possible de choisir les deux surfaces (S) et (S₁) de telle manière que les droites MM₁ soient tangentes en M à la première?

Pour répondre à cette question, rapportons la surface (S) aux courbes ($v = \text{const.}$), auxquelles les droites MM₁ seront tangentes, et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$); son élément linéaire sera de la forme

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2.$$

Soient Mx, My les tangentes aux lignes coordonnées, et Mz la normale à la surface; les coordonnées du point M₁ sont (x , 0, 0). On a, pour les composantes du déplacement infiniment petit du point M,

$$A du, \quad C dv, \quad 0,$$

et, pour celles du déplacement correspondant de M₁ ⁽¹⁾,

$$dx + A du, \quad C dv + (r du + r_1 dv)x, \quad - (q du + q_1 dv)x.$$

Nous exprimerons toutes les conditions du problème en écrivant que le déplacement du point M est parallèle à la projection

(¹) Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 385.

du déplacement du point M_1 sur le plan xM_1y , ce qui donnera

$$\frac{dx + \Lambda du}{\Lambda du} = \frac{C dv + (r du + r_1 dv)x}{C dv}.$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient du et dv , on en conclut, en tenant compte des valeurs de r et de r_1 ,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\Lambda}{C} \frac{\partial \Lambda}{\partial v} x = 0, \\ C \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ C \frac{\partial x}{\partial u} - x \frac{\partial C}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

On tire de là

$$\Lambda = U, \quad x = U_1, \quad C = U_1 V,$$

U et U_1 désignant des fonctions arbitraires de u et V une fonction arbitraire de v .

Nous arrivons donc à cette conclusion : Pour que la surface (S) satisfasse à la question, il est nécessaire et il suffit que son élément linéaire soit de la forme

$$ds^2 = U^2 du^2 + U_1^2 V^2 dv^2.$$

La surface (S) choisie, la surface (S_1) sera le lieu du point $(U_1, 0, 0)$.

Il suffit de poser

$$\int U du = \alpha, \quad \int V dv = \beta,$$

pour ramener l'élément linéaire ci-dessus à la forme la plus générale de l'élément linéaire des surfaces de révolution, savoir

$$ds^2 = d\alpha^2 + \Lambda(\alpha) d\beta^2.$$

Les équations (1) donnent ensuite

$$M M_1 = m \sqrt{\Lambda(\alpha)},$$

m désignant une constante arbitraire.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si deux surfaces (S) et (S₁) se correspondent ponctuellement de telle manière que deux éléments correspondants MM', M₁M'₁ et la normale en M soient parallèles à un même plan; si, en outre, les droites MM₁ sont tangentes à la surface (S), cette dernière sera applicable sur une surface de révolution. L'élément linéaire ayant été ramené à la forme

$$ds^2 = dz^2 + A(z) d\beta^2,$$

les droites MM₁ seront tangentes aux lignes $\beta = \text{const.}$, et l'on aura $MM_1 = m\sqrt{A(z)}$, m désignant une constante.

Réciproquement, si une surface (S) est applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire

$$ds^2 = dz^2 + A(z) d\beta^2,$$

et si l'on porte, à partir de chaque point M de la surface (S), sur la tangente à la courbe $\beta = \text{const.}$ qui passe en ce point, une longueur $MM_1 = m\sqrt{A(z)}$, m désignant une constante, le lieu du point M₁ sera une surface (S₁) qui correspondra à la surface (S) dans les conditions indiquées ci-dessus.

SÉANCE DU 21 MARS 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. D. André : *Sur la structure des permutations.*

M. Antonari : *Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices.*

M. Ém. Picard adresse une Note *Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires.*

SÉANCE EXTRAORDINAIRE DU 30 MARS 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Pellet : *Sur les équations solubles par radicaux.*

M. Pellet : *Sur les équations numériques et les fonctions implicites.*

M. ANDRADE communique la Note suivante :

Note sur les intégrales de M. Schwarz.

Si l'on considère la suite infinie de fonctions $V_0, V_1, V_2, \dots$ s'annulant toutes sur la surface qui limite un volume D , et satisfaisant, à l'intérieur de ce volume, aux équations

$$(1) \quad \Delta V_{i+1} + V_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

et si l'on envisage les intégrales de volume relatives au domaine D ,

$$W_{m,n} = \int V_m V_n d\tau,$$

le théorème de Green montre immédiatement que ces intégrales sont toutes positives et que l'on a

$$W_{m,n} = W_{0,m+n}.$$

De plus, on aura

$$(2) \quad \frac{W_{01}}{W_{00}} < \frac{W_{02}}{W_{01}} < \frac{W_{03}}{W_{02}} < \dots;$$

c'est là un théorème de M. Schwarz dont j'ai trouvé une démonstration qui, paraît-il, est nouvelle, et, comme elle est fort simple, peut-être lui accordera-t-on quelque intérêt.

En raison de la relation $W_{m,n} = W_{0,m+n}$, il suffit d'établir les deux premières inégalités (2).

Soient λ, μ, ρ les valeurs des trois premiers rapports. Nous aurons d'abord

$$\begin{aligned} \int V_0 V_1 d\tau - \lambda \int V_0^2 d\tau &= 0, \\ \int V_0 V_2 d\tau - \mu \int V_0 V_1 d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Remplaçant $\int V_0 V_2 d\tau$ par $\int V_1^2 d\tau$, et posant $V_1 = V_0 + \varepsilon_0$, nous obtenons

$$(1-\lambda) \int V_0^2 d\tau + \int V_0 \varepsilon_0 d\tau = 0,$$

$$(1-\mu) \int V_0^2 d\tau + (2-\mu) \int V_0 \varepsilon_0 d\tau + \int \varepsilon_0^2 d\tau = 0;$$

d'où, en éliminant l'intégrale $\int V_0 \varepsilon_0 d\tau$, dont nous ignorons le signe, nous tirons

$$[\lambda - \mu - (1-\lambda)(1-\mu)] \int V_0^2 d\tau + \int \varepsilon_0^2 d\tau = 0,$$

et, par suite,

$$(3) \quad \lambda - \mu - (1-\lambda)(1-\mu) < 0,$$

inégalité non homogène. Là est le point essentiel de ma démonstration.

Pareillement, nous avons la relation

$$\int V_1 V_2 d\tau - \rho \int V_0 V_2 d\tau = 0,$$

que nous pourrions écrire

$$(1-\rho) \int V_0 V_2 d\tau + \int \varepsilon_0 V_2 d\tau = 0.$$

Si nous posons $V_2 = V_1 + \varepsilon_1$, elle devient

$$(1-\rho) \int V_0 V_2 d\tau + \int \varepsilon_0 \varepsilon_1 d\tau + \int \varepsilon_0 V_1 d\tau = 0.$$

D'autre part, en écrivant ainsi l'équation de définition de μ ,

$$(1-\mu) \int V_1^2 d\tau + \mu \int \varepsilon_0 V_1 d\tau = 0,$$

et éliminant, entre les deux dernières équations écrites, l'intégrale $\int \varepsilon_0 V_1 d\tau$, dont nous ignorons le signe, nous aurons

$$[\mu(1-\rho) + \mu - 1] \int V_1^2 d\tau + \mu \int \varepsilon_0 \varepsilon_1 d\tau = 0.$$

Or, comme la suite $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ jouit évidemment des mêmes pro-

réelles $x, u, v, \dots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \dots, w_0$, définies quand $x, u, \dots, w$ restent respectivement comprises dans les intervalles

$$(x_0 - a, x_0 + a), \quad (u_0 - b, u_0 + b), \quad \dots, \quad (w_0 - b, w_0 + b),$$

a et b étant deux constantes positives. De plus, on suppose que l'on puisse déterminer n quantités positives $A, B, \dots, L$ telles que

$$|f_i(x, u', v', \dots, w') - f_i(x, u, v, \dots, w)| \leq A |u' - u| \\ + B |v' - v| + \dots + L |w' - w|,$$

x , ainsi que les $u, v, \dots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Soit enfin M la valeur absolue maxima de la fonction pour le domaine dans lequel elle est définie. J'ai établi autrefois (*voir mon Traité d'Analyse*, t. II, p. 301) qu'on pouvait, en procédant par approximations successives, obtenir sous forme de séries convergentes les intégrales du système (S) prenant respectivement pour $x = x_0$ les valeurs $u_0, v_0, \dots, w_0$. Ces séries convergent certainement dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δ étant la plus petite des *trois* quantités $a, \frac{b}{M}, \frac{1}{A+B+\dots+L}$.

Tout récemment, M. Lindelöf⁽¹⁾ vient de montrer qu'on pouvait supprimer la troisième expression en modifiant seulement très peu les raisonnements tout élémentaires dont j'avais fait usage, et M. Bendixon⁽²⁾ était arrivé, de son côté, par une autre voie, au même résultat. On peut donc dire que la convergence des séries fournies par les approximations successives correspond à la plus petite des *deux* quantités a et $\frac{b}{M}$.

L'intervention de la seconde de ces deux quantités provient de ce que les valeurs de $u, \dots, w$ données par les approximations successives ne doivent pas sortir du champ pour lequel les fonctions f sont définies. Si, notamment, les fonctions f sont définies pour toute valeur de $u, v, \dots, w$, nous n'aurons pas à nous préoccuper du quotient $\frac{b}{M}$, cela, toutefois, sous la réserve de l'exis-

(1) E. LINDELÖF (*Comptes rendus*, 26 février 1894).

(2) I. BENDIXON (*Académie des Sciences de Stockholm*, novembre 1893).

tence des quantités finies $A, \dots, L$ qui continuent à intervenir dans les raisonnements, si elles ne figurent plus dans les conclusions.

Toutes ces considérations s'étendent d'elles-mêmes au cas où les fonctions seraient définies pour des valeurs complexes des lettres dont elles dépendent. Dans ce qui va suivre, la variable x restera réelle, mais les f pourront dépendre d'éléments complexes, et les fonctions $u, v, \dots, w$ seront des fonctions complexes d'une variable réelle. On doit alors, dans ce qui précède, remplacer les valeurs absolues par des modules.

2. Appliquons ces généralités aux équations différentielles linéaires. L'équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_m(x) y = 0$$

rentre dans les conditions d'application de la méthode précédente. Si, dans l'intervalle $(0, a)$, les coefficients $A_1, \dots, A_m$ sont des fonctions continues de x , nous pouvons bien trouver les quantités déterminées $A, B, \dots, L$ du paragraphe précédent, et *les approximations successives donneront une série convergente pour toute intégrale dans l'intervalle $(0, a)$* . De plus, si nous désignons, comme nous le faisons d'habitude, cette série par

$$(\Sigma) \quad y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots,$$

on aura, d'après la théorie générale,

$$|y_n - y_{n-1}| < \frac{H^n x^n}{1.2 \dots n} \quad (H = A + B + \dots + L).$$

L'expression analytique de toute intégrale, donnée par la méthode des approximations successives, et *valable pour tout intervalle dans lequel les coefficients $A_1(x), \dots, A_m(x)$ sont continus*, permet de démontrer facilement quelques théorèmes généraux et de faire diverses recherches sur les équations linéaires.

3. Supposons que les coefficients $A_1(x), \dots, A_m(x)$ dépendent d'un paramètre arbitraire k , et qu'ils soient, pour x variant entre 0 et a , des fonctions entières de ce paramètre, c'est-à-dire holo-

morphes dans tout le plan de la variable complexe k . C'est une circonstance qui se présentera souvent, particulièrement en Physique mathématique. Je me propose de montrer que *toute intégrale de l'équation est, pour x variant entre 0 et a , une fonction entière de k* .

Chaque terme de la série (Σ) est manifestement une fonction entière de k ; il faut établir que la série sera aussi une fonction entière. Supposons que k reste à l'intérieur d'un cercle C de rayon d'ailleurs arbitraire ayant l'origine pour centre; dans ces conditions, la quantité Π aura un certain maximum, que nous désignerons par la même lettre. Nous avons donc une série

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

dont chaque terme est une fonction holomorphe de k dans C , et l'on a de plus

$$(1) \quad |u_n| < \frac{\Pi^n a^n}{1.2 \dots n}.$$

Ceci posé, la formule fondamentale de Cauchy donne

$$u_n(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_n(z) dz}{z - k},$$

et l'on aura, par suite, puisque la série des u est d'après (1) uniformément convergente,

$$u_0(k) + \dots + u_n(k) + \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u_0(z) + \dots + u_n(z) + \dots}{z - k} dz,$$

ce qui montre que le premier membre est une fonction holomorphe de k dans C , comme nous voulions l'établir.

4. Une seconde application de la méthode des approximations successives nous sera fournie par les équations linéaires à coefficients périodiques. Bornons-nous, pour abréger, à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \Lambda_1(x) \frac{dy}{dx} + \Lambda_2(x) y = 0,$$

et supposons que les fonctions Λ_1 et Λ_2 soient continues pour toute valeur réelle de x et *admettent la période ω* .

Il est bien connu qu'il y a, en général, un système d'intégrales se reproduisant multipliées par des constantes μ_1 et μ_2 quand on change x en $x + \omega$. La formation de l'équation du second degré donnant μ_1 et μ_2 est un problème important et difficile dans la théorie des équations à coefficients périodiques. On peut procéder comme il suit. Partons de deux solutions arbitraires $f_1(x), f_2(x)$, représentées par les développements en séries, *valables pour toute valeur réelle de x* , que fournissent les approximations successives. Nous pouvons considérer ces solutions comme connues. On cherche alors une solution

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

qui se reproduise à un facteur constant près, par le changement de x en $x + \omega$. Il faut, pour cela, avoir la substitution résultant du changement de x en $x + \omega$ dans f_1 et f_2 , c'est-à-dire les coefficients a, b, c, d tels que

$$\begin{aligned} f_1(x + \omega) &= a f_1(x) + b f_2(x), \\ f_2(x + \omega) &= c f_1(x) + d f_2(x). \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= a f_1(0) + b f_2(0), \\ f_1(2\omega) &= a f_1(\omega) + b f_2(\omega); \end{aligned}$$

ces deux équations donnent a et b , et l'on aura pareillement c et d .

Quant à l'équation donnant μ_1 et μ_2 , on sait qu'elle se réduit à

$$\begin{vmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Les constantes a, b, c, d peuvent donc être calculées *numériquement* avec telle approximation que l'on veut. De plus, si les coefficients $\Lambda_1(x)$ et $\Lambda_2(x)$ dépendent d'un ou plusieurs paramètres, on pourra connaître la façon dont a, b, c, d dépendent de ce paramètre, puisque l'on a une représentation, non seulement *numérique*, mais aussi *analytique* des deux solutions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ dont on est parti.

Un cas d'exception peut se rencontrer dans le calcul précédent : c'est celui où l'on aurait

$$\frac{f_1(0)}{f_1(\omega)} = \frac{f_2(0)}{f_2(\omega)};$$

mais alors on a une solution

$$\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$$

s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \omega$, et cette solution se reproduit précisément, à un facteur constant près, quand on change x en $x + \omega$.

§. Les calculs précédents peuvent être employés pour la solution d'une question d'apparence différente, mais identique au fond. Prenons, en nous bornant encore au second ordre, pour abréger l'écriture, l'équation

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + A_1(z) \frac{du}{dz} + A_2(z) u = 0,$$

où nous supposons que $A_1(z)$ et $A_2(z)$ soient deux fonctions holomorphes de z dans la couronne comprise entre deux circonférences C et C' ayant l'origine pour centre et les rayons R et R' ($R > R'$). Il existe, en général, deux solutions dans cette couronne, se reproduisant, à un facteur constant près, quand z tourne dans la couronne autour du cercle C' . Les coefficients de l'équation du second degré donnant ces facteurs constants jouent un rôle important et ont un caractère invariant; on pourra consulter sur ce sujet un très intéressant Mémoire de M. von Koch (*Acta Mathematica*, t. XV).

Ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent pourra être appliqué ici. Posons, en effet,

$$z = re^{i\theta}, \quad (R > r > R').$$

On peut regarder θ comme seule variable, et nous avons alors une équation où les coefficients sont des fonctions de la variable réelle θ et ont 2π pour période. Nous sommes donc ramené à la recherche faite plus haut.

Du théorème du § 3, on conclut de suite que, si les fonctions $A_1(z)$, $A_2(z)$ sont des fonctions entières d'un certain nombre de paramètres, les coefficients de l'équation en u seront des fonctions uniformes de ces paramètres.

SUR LES SURFACES RÉGLÉES APPLICABLES AVEC PARALLÉLISME DES GÉNÉRATRICES;

Par M. X. ANTONARI.

Dans une Communication faite il y a quelque temps à la Société mathématique, M. Caronnet a étudié les couples de surfaces applicables dont la distance des points correspondants demeure constante. Il a trouvé deux catégories de surfaces jouissant de cette propriété et les surfaces de l'une de ces catégories sont des couples de surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices. Je me propose de montrer, dans cette Note, comment on peut obtenir les surfaces de cette catégorie en faisant usage de la méthode que j'ai suivie dans ma thèse pour étudier les surfaces réglées, et dont je rappellerai brièvement le principe.

1. Pour étudier une surface réglée, je prends comme variable indépendante l'arc t de la représentation sphérique du cône directeur de la surface, et j'introduis trois fonctions de cet arc, que j'appelle les trois invariants de la surface, que je désigne par les lettres θ , h et k et qui sont définies de la manière suivante :

θ est la courbure géodésique de la représentation sphérique du cône directeur ;

h et k sont les quotients respectifs par dt (angle de deux génératrices infiniment voisines) des projections, sur la génératrice et sur la normale au plan asymptote, du déplacement infiniment petit du point central sur une génératrice. J'ajoute que k n'est autre chose que le paramètre de distribution des plans tangents.

2. Soit OX une génératrice mobile sur la surface, O désignant le point central sur cette génératrice.

Imaginons un premier trièdre trirectangle fixe (o, xyz) , et un autre trièdre trirectangle mobile (O, XYZ) présentant la même disposition que le premier et dont les arêtes respectives sont : la génératrice OX , la normale OZ au plan asymptote menée par le point central et la normale OY à la génératrice menée par le même point dans le plan asymptote ; puis appelons α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe OX rapporté au trièdre fixe, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ceux de

OY et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ceux de OZ, ces neuf cosinus étant supposés définis en fonction de t . Appelons enfin x, y, z les coordonnées, fonctions de t , du point central O, rapporté au trièdre fixe (o, xyz) .

En vertu de la définition de h et de k , on voit immédiatement que la ligne de striction de la surface est définie par l'équation

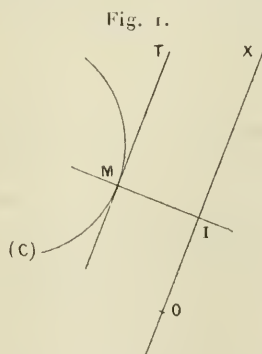
$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2) dt$$

et par deux autres équations analogues. On voit du reste aussi qu'un point quelconque de la surface est défini par l'équation

$$x = \int (h\alpha + k\alpha_2) dt + \lambda\alpha,$$

et par deux autres équations analogues.

3. Considérons une surface réglée dont le cône directeur ne soit pas un plan et soit (C) (fig. 1) l'arête de rebroussement de la



développable circonscrite à l'infini. A tout point M de cette courbe il correspond une génératrice de la surface réglée, parallèle à la tangente en M à la courbe (C) et située, bien entendu, dans le plan osculateur en M à cette courbe. Soit OX cette génératrice et soit MI la perpendiculaire à cette droite menée par M. Désignons par l le segment algébrique $MI = l$, par ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de la courbe (C) en M.

On trouve sans peine :

1° Que l'invariant θ est égal au quotient $\frac{\rho}{\tau}$;

2° Que l'on a les formules

$$k = -\theta l, \quad h = \varphi - (l + l''), \quad \left(l'' = \frac{d^2 l}{dt^2} \right);$$

3° Que si O est le point central sur OX, on a

$$10 = \frac{dl}{dt}.$$

4. Inversement, il est clair que toute courbe gauche peut être considérée comme l'arête de rebroussement de la développable asymptote à une surface réglée. Les formules précédentes définissent les invariants de la surface en fonction de la courbure et de la torsion de la courbe.

Lorsque la développable asymptote est un cône, la courbe (C) se réduit à un point et l'on voit sans difficulté comment on passe du cône asymptote à la surface réglée.

5. Si l'on désigne par λ l'abscisse, par rapport au point central, d'un point situé sur une génératrice d'une surface réglée, l'élément linéaire de la surface prend la forme simple

$$dS^2 = d\lambda^2 + 2hd\lambda dt + (h^2 + k^2 + \lambda^2)dt^2.$$

Toutes les propriétés des surfaces réglées, au point de vue de l'applicabilité, résultent de ce que cette expression de l'élément linéaire ne dépend que de h et de k . On voit, en particulier, qu'elle ne change pas quand on change k en $-k$, ce qui conduit immédiatement à la notion des surfaces réglées applicables génératrice par génératrice, et avec parallélisme de ces droites. Si la ligne de striction d'une surface réglée (R) est définie par les équations analogues à

$$(1) \quad x = \int (h x_1 + k x_2) dt,$$

celle de la surface (R') qui lui est applicable avec parallélisme des génératrices est définie par les équations analogues à

$$(2) \quad x_1 = \int (h x_1 - k x_2) dt.$$

Voici d'abord quelques conséquences simples de ces formules.

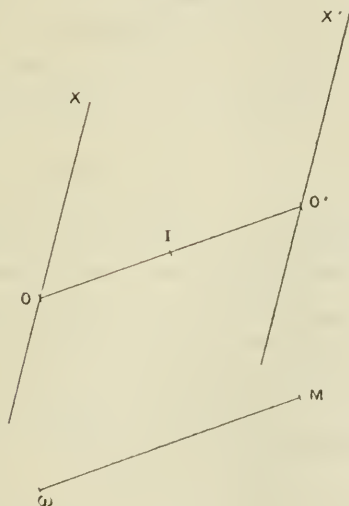
6. Supposons que k et h soient constants, ce qui revient à supposer, comme il est facile de s'en assurer, que (R) et (R') sont applicables sur l'hyperboloïde de révolution, et formons les expressions analogues à $\frac{x+x_1}{2}$ et à $\frac{x-x_1}{2}$; nous obtenons

$$(3) \quad \frac{x+x_1}{2} = \int h z dt = h \int z dt,$$

$$(4) \quad \frac{x-x_1}{2} = \int k z_2 dt = k \int z_2 dt.$$

Soient O et O' (fig. 2) les points centraux correspondants de (R)

Fig. 2.



et de (R') , et soit I le milieu de OO' ; les formules analogues à (3) signifient que la trajectoire du point I est une courbe à *courbure constante*. Pareillement, si par un point fixe ω on mène le vecteur ωM parallèle et égal à OO' , les formules analogues à (4) montrent que le lieu du point M est une courbe à *torsion constante*.

On serait conduit, bien entendu, à des résultats analogues si h seul ou k seul était constant.

7. Arrivons maintenant aux surfaces réglées applicables g n -

ratrice par génératrice et de telle sorte que la distance des points correspondants demeure constante.

Il est clair d'abord que les génératrices correspondantes devront être parallèles; les lignes de striction des deux surfaces seront donc définies par les formules (1) et (2). Appelons, comme plus haut, (R) et (R') les deux surfaces, O et O' (*fig. 2*) les points centraux correspondants, ωM le vecteur égal et parallèle à OO' mené par un point fixe ω . Par hypothèse la longueur ωM est constante; il en résulte que la tangente en M à la trajectoire de ce point est perpendiculaire à ωM . Mais des formules (1) et (2) on déduit que $x - x_1 = 2 \int k z_2 dt$; d'où il suit que la tangente en M à la trajectoire de ce point est parallèle à la direction $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. La direction $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ est donc perpendiculaire à OO' et aux génératrices OX et $O'X'$ des deux surfaces menées respectivement par O et O'; il en résulte qu'elle est perpendiculaire au plan de ces deux droites. Or, le plan mené par OX perpendiculairement à la direction $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ est le plan asymptote à la surface (R); pareillement le plan mené par $O'X'$ perpendiculairement à $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ est le plan asymptote à la surface (R'). Donc ces deux plans coïncident et les deux surfaces sont inscrites dans la même développable asymptote; par suite, on peut les obtenir toutes deux en partant de la même courbe gauche, par le mode de description indiqué au n° 4. Appelons θ, h et k les invariants de (R); ceux de (R') sont θ, h et $-k$. Mais si l'on désigne par ρ et τ les rayons de courbure et de torsion de l'arête de rebroussement de la développable asymptote commune, par l et l_1 les deux segments qui permettent de passer de cette courbe aux deux surfaces respectives (nos 3 et 4), on a

$$k = -l \frac{\rho}{\tau}, \quad -k = -l_1 \frac{\rho}{\tau};$$

il en résulte

$$l_1 = -l.$$

D'autre part on a aussi

$$h = \rho - (l + l'')$$

et

$$h = \rho - (l_1 + l_1'').$$

On en déduit facilement

$$l + l'' = 0$$

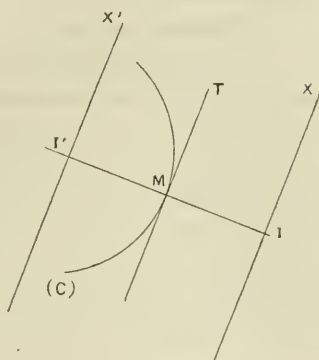
et enfin

$$l = A \sin(t + B),$$

A et B désignant des constantes.

D'après cela, pour obtenir tous les couples de surfaces cherchées, on partira d'une courbe gauche quelconque (C) (*fig. 3*); puis sur

Fig. 3.



la normale principale en un point M, variable sur cette courbe, on portera $MI = A \sin(t + B)$, $MI' = -A \sin(t + B)$ et l'on mènera IX et I'X' parallèles à la tangente MT. Quand le point M parcourt la courbe (C), les droites IX et I'X' engendrent les deux surfaces (R) et (R') répondant à la question.

RECHERCHES SUR LES SURFACES HARMONIQUES (RÉSUMÉ);

Par M. L. RAFFY.

Les recherches que je vais résumer se rapportent à une classe très étendue de surfaces dont la propriété caractéristique ne semble pas avoir été remarquée avant Jacobi. Elle consiste dans la possibilité, pour leur élément linéaire, d'acquiescer la forme

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

les U étant des fonctions de la seule variable u , et les V de v . Ce n'est pas ici le lieu de rappeler comment Jacobi, ayant ramené à cette forme l'élément linéaire des quadriques, a déterminé les lignes géodésiques de ces surfaces; ni comment Liouville a étendu

à toutes les surfaces de la classe ce résultat important, extension qui pouvait, comme on sait, s'obtenir sans modifier en quoi que ce fût la méthode de Jacobi. Ainsi se trouvait fondée la théorie des surfaces dont nous allons nous occuper et que nous proposons d'appeler *surfaces harmoniques*. On pensera avec nous que cette dénomination est amplement justifiée, qu'elle s'impose presque, si l'on veut bien être attentif à l'identité des problèmes fondamentaux concernant l'élément linéaire de ces surfaces et les équations qui ont reçu le nom d'*équations harmoniques*. Je n'insisterai pas sur cette identité, qui se manifeste à toutes les pages du chapitre que M. Darboux consacre à ces équations dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* ⁽¹⁾. Il était d'ailleurs indispensable de rappeler par un adjectif la propriété de ces surfaces, pour pouvoir caractériser brièvement celles qui la possèdent à divers titres. Il existe, en effet, des surfaces dont l'élément linéaire peut être ramené de *deux* manières différentes, et, par suite, d'une infinité de manières, à l'une des formes équivalentes

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)] dx dy.$$

qui seront pour nous les *formes harmoniques*. À ces surfaces nous donnons le nom de surfaces *doublement harmoniques*. Les surfaces *simplement harmoniques* sont celles qui ne jouissent pas de cette propriété. Les éléments linéaires sont désignés comme les surfaces auxquelles ils appartiennent.

Bien que Liouville eût appelé l'attention sur les surfaces harmoniques en étudiant leurs géodésiques et en déterminant les formes harmoniques de l'élément linéaire du plan, la théorie de ces surfaces semble avoir été délaissée jusqu'à l'époque où M. Massieu, s'occupant après M. Bertrand des intégrales algébriques des problèmes de la Dynamique, fit connaître, dans sa thèse (1861), deux propositions de la plus haute importance, relatives, la première aux surfaces de révolution, qui sont des surfaces harmoniques particulières ($f=0$), la seconde aux surfaces

(1) T. II, Livre IV, Chap. IX.

harmoniques proprement dites. Les résultats de M. Massieu se trouvant exposés, complétés même, dans l'ouvrage de M. Darboux ⁽¹⁾, nous ne les transcrivons pas ici tout au long. Nous prenons d'ailleurs le second comme point de départ de toute notre première partie.

Quelques années après M. Massieu, Ossian Bonnet, dans l'importante *Addition* jointe à son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* ⁽²⁾, s'est occupé incidemment des surfaces harmoniques. Il a montré que les quadrriques sont les seules surfaces dont l'élément linéaire acquière la forme harmonique quand on les rapporte aux paramètres u et v de leurs lignes de courbure.

M. Dini ⁽³⁾ a fait connaître en 1869 cette propriété générale des surfaces harmoniques : *Si deux surfaces sont telles qu'il existe entre les points réels de l'une et ceux de l'autre une correspondance conservant les lignes géodésiques, ces deux surfaces sont harmoniques*. On dit qu'on peut faire la *représentation géodésique* de l'une sur l'autre.

C'est peut-être en étudiant de plus près ce problème de la représentation géodésique, sans exclure les correspondances imaginaires, que M. Lie a été conduit à la recherche toute différente des transformations infinitésimales qui conservent les géodésiques d'une même surface. Il a publié sur cette question un *Mémoire étendu* ⁽⁴⁾ dont nous parlerons plus loin, et dans lequel apparaît la notion d'élément linéaire doublement harmonique. Nous n'en retiendrons ici qu'une proposition détachée (note 5), sur laquelle nous n'aurons pas à revenir : *Toute surface minima, qui est en même temps une surface harmonique, est applicable sur une surface de révolution*.

Plus récemment encore, M. Darboux, dans son ouvrage déjà cité (Livre IV, Chap. IX), a fait connaître un élément linéaire réductible d'une infinité de manières à la forme harmonique; et il a signalé comme devant faire le sujet d'une recherche difficile

(1) T. III, Livre VI, Chap. II.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*, 42^e Cahier; 1867.

(3) *Annali di Matematica*, t. III.

(4) *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Mathem. Annalen*, t. XX; 1882).

la détermination générale de tous les éléments linéaires jouissant de la même propriété. En outre, il a indiqué (Livre VI, Chap. II) un moyen d'obtenir ceux de ces éléments linéaires qui conviennent à des surfaces de révolution.

Dans un tout autre ordre d'idées, M. Weingarten a obtenu deux résultats de la plus haute importance. Il a d'abord ⁽¹⁾ déterminé *toutes* les surfaces admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2(u - v^2) dv^2,$$

qui est harmonique comme appartenant à une quadrique (paraboloïde imaginaire). Généralisant ensuite ⁽²⁾ la transformation qui lui avait réussi dans ce cas, il en a déduit *toutes* les surfaces dont l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2\left(u + \frac{v}{a} + e^{2av}\right) dv^2$$

convient à d'autres paraboloïdes, imaginaires aussi.

Tout ce qui constitue aujourd'hui la théorie des surfaces harmoniques, en dehors des travaux que nous venons d'énumérer, est contenu, à fort peu de chose près, dans nos *Recherches*. C'est ce qui résulte du rapport présenté à l'Académie des Sciences ⁽³⁾ sur le concours dont cette théorie a fait le sujet. Le mémoire couronné traite exclusivement des éléments linéaires doublement harmoniques, dont la détermination complète forme la seconde partie de mon travail. Un autre, qui a partagé avec le mien une mention honorable, ne contient, sauf quelques théorèmes communs aux trois mémoires approuvés, que les deux beaux résultats mentionnés ci-dessus, le second trouvé sans nul doute avant que M. Weingarten le publiât.

(A suivre.)

⁽¹⁾ *Göttinger Nachrichten*; 1887.

⁽²⁾ *Comptes rendus Acad. des Sciences*, t. CMII; 1891.

⁽³⁾ *Ibid.*, séance du 19 décembre 1892, t. CXV, p. 1122.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 AVRIL 1894.

PRÉSIDENTE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Fleury : *Sur le calcul de l'infini.*

M. Burkhardt : *Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension.*

M. Carvallo : *Sur la propriété fondamentale des surfaces minima.*

M. FEHR communique la Note suivante :

Remarque sur le théorème de M. Moutard.

D'après le théorème de M. Moutard ⁽¹⁾, si l'on sait intégrer l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(x, y) z,$$

on peut, en général, en déduire une suite illimitée d'équations nouvelles et de même forme dont on obtiendra l'intégrale au moyen de simples quadratures.

Employons, pour abréger, le symbole

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

et considérons deux équations consécutives de la suite

$$(2) \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_1, \quad \dots, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_i, \quad \mathfrak{F}(z) = \lambda_{i+1}, \quad \dots$$

obtenue d'après le procédé connu. On a, par exemple,

$$\lambda_{i+1} = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\omega_i}\right),$$

ω_i étant une solution particulière de $\mathfrak{F}(z) = \lambda_i$.

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, §§ 390-392.

Nous nous proposons de voir si la suite (2) peut être limitée. Il faut pour cela que l'on ait $\lambda_{i+1} = \lambda_i$, d'où

$$(3) \quad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\omega_i}\right) = \mathfrak{F}(\omega_i).$$

De là résulte immédiatement que ω_i satisfait à la relation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \log \omega_i}{\partial x \partial y} = 0.$$

L'équation transformée sera donc identique à l'équation primitive si la solution particulière ω_i est le produit d'une fonction de x par une fonction de y .

On voit facilement que la suite (2) se réduit à l'équation primitive dans laquelle $\lambda(x, y)$ est de la forme $f(x)\varphi(y)$. Dans ce cas, l'équation (1) peut, comme on le sait, toujours être ramenée à la forme simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z.$$

Remarquons encore que, dans ce cas, la méthode de Laplace⁽¹⁾ transforme également cette équation en elle-même.

M. ZAREMBA adresse la Note suivante :

Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique.

Nous simplifierons le langage en convenant de dire qu'un système de périodes

$$(1) \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_n$$

d'une fonction $f(x)$ est un *système complet* si une période quelconque Ω de $f(x)$ est une fonction linéaire et homogène à coefficients entiers des périodes (1). Cela posé, soit $f(x)$ une fonction pour laquelle le système (1) est un système complet de périodes. On sait que, si les quantités (1) vérifient p relations

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_i^k \omega_i = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, p),$$

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, Chap. II, en particulier § 332.

indépendantes, linéaires et homogènes et à coefficients entiers, il existe pour $f(x)$ des systèmes complets de périodes se composant chacun de $n - p$ périodes indépendantes. Je me propose de démontrer ce théorème par une méthode qui offre un certain intérêt en ce sens qu'elle fait connaître un procédé régulier pour calculer les systèmes complets de périodes dont l'existence forme l'objet du théorème. J'établirai dans ce but que, pour la fonction $f(x)$, on peut trouver un système complet

$$(3) \quad \omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \dots, \quad \omega'_{n-1},$$

se composant de $n - 1$ périodes. En effet, envisageons l'une des relations (2), celle par exemple qui correspond à $k = 1$,

$$\sum_{i=1}^{i=n} a'_i \omega_i = 0,$$

et supposons d'abord que, parmi les nombres a'_i , il y en ait deux, a'_1 et a'_2 , qui soient premiers entre eux. On pourra déterminer deux entiers α et β tels que l'on ait

$$\alpha a'_1 + \beta a'_2 = 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement que l'on peut poser

$$\begin{aligned} \omega'_{i-1} &= \omega_i & (i = 3, 4, \dots, n), \\ \omega'_1 &= \beta \omega_1 - \alpha \omega_2. \end{aligned}$$

Admettons maintenant que, parmi les nombres a'_i , il n'y en ait pas deux qui soient premiers entre eux, et désignons par Δ le plus grand commun diviseur de a'_1 et a'_2 . On pourra alors trouver deux entiers α et β vérifiant l'équation

$$\alpha'_1 \alpha + \alpha'_2 \beta = \Delta,$$

et l'on s'assurera sans peine que le système

$$(4) \quad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \dots, \quad \Omega_n,$$

défini par les équations

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \omega_i & (i = 3, 4, \dots, n), \\ \Omega_2 &= \frac{\alpha'_1}{\Delta} \omega_1 + \frac{\alpha'_2}{\Delta} \omega_2, \\ \Omega_3 &= \beta \omega_1 - \alpha \omega_2, \end{aligned}$$

est un système complet de périodes de la fonction $f(x)$. L'une des p relations, analogues aux équations (2), qui existent entre les périodes (4) sera la suivante :

$$\Delta\Omega_2 + \sum_{i=3}^{i=n} a'_i \Omega_i = 0.$$

Si, parmi les nombres

$$\Delta, a'_3, a'_4, \dots, a'_n,$$

il s'en trouve deux qui soient premiers entre eux, on déduira aisément du système (4) le système (3); il suffira d'appliquer ce qui a été dit dans le cas où a'_1 et a'_2 sont premiers entre eux. S'il n'en est pas ainsi, on déduira du système (4), par le procédé qui a servi à déduire celui-ci du système (1), un nouveau système complet de périodes

$$\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_n$$

de $f(x)$, tel que, parmi les p relations existant entre ces périodes, il y en ait une ne contenant ni Ω'_1 ni Ω'_2 .

Il résulte de là qu'en effectuant $n - 1$ opérations au plus, analogues à celle au moyen de laquelle on a obtenu le système (4), on parviendra à un système complet de périodes

$$\Omega^s_1, \Omega^s_2, \dots, \Omega^s_n$$

de $f(x)$, d'où l'on pourra déduire un système tel que le système (3). D'ailleurs, comme rien n'empêche d'opérer sur le système (3) comme on l'a fait sur le système (1), il est évident que la fonction $f(x)$ admettra un système complet de périodes ne comprenant que $n - p$ périodes

$$(5) \quad \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-p}.$$

On s'assurera sans peine que les quantités (5) ne vérifient aucune relation linéaire et homogène et à coefficients entiers. On remarquera aussi qu'il résulte de notre méthode qu'il y a une infinité de systèmes tels que le système (5).

SÉANCE DU 18 AVRIL 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Caronnet : *Sur les courbes que toutes leurs sécantes rencontrent en un troisième point.*

M. Raffy : *Sur l'intégration de certaines différentielles exactes qui dépendent de fonctions arbitraires.*

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Poincaré : *Sur la théorie des marées.*

M. Raffy : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Balitrand adresse un Mémoire intitulé : *Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES FONCTIONS DE GREEN RELATIVES A UN DOMAINE D'UNE DIMENSION :

Par M. H. BURKHARDT.

Dans la théorie du potentiel logarithmique, on appelle *fonction de Green* relative à un domaine donné de deux dimensions une fonction $G(x, y, \xi, \eta)$ qui satisfait à l'intérieur de ce domaine à l'équation différentielle

$$\Delta G \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0,$$

qui y reste holomorphe, à l'exception du seul point (ξ, η) , où elle devient infinie comme $\log r$, r étant la distance de (x, y) à (ξ, η) , et qui s'annule sur le contour du domaine. Cette fonction une fois trouvée, l'intégrale double

$$u(x, y) = - \iint G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

étendue à tout le domaine donné, fournit la solution du problème

suivant : *Étant donnée une fonction arbitraire f , trouver une fonction u , continue dans tout le domaine, qui y satisfasse à l'équation $\Delta u = f$, et qui s'annule sur le contour.*

De même, dans la théorie du potentiel newtonien, on considère la fonction de Green relative à un espace de trois dimensions, qui a des propriétés analogues, $\log r$ étant remplacé par $\frac{1}{r}$; et si l'on voulait aborder la théorie de l'équation de Laplace à plus de trois variables indépendantes, il y aurait lieu de considérer des fonctions devenant nulles comme les puissances supérieures de $\frac{1}{r}$.

On peut se demander quel est le premier terme de cette suite. Existe-t-il quelque chose d'analogue pour des domaines d'une seule dimension, pour des équations du second ordre ordinaires? Il suffit de transformer un peu quelques résultats bien connus pour obtenir une réponse affirmative à cette question. L'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

se fait par deux quadratures superposées; on sait qu'on peut les remplacer par deux quadratures juxtaposées, moyennant une intégration par parties. La solution particulière qui s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$ peut être représentée par

$$u = - \int_a^x \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} f(\xi) d\xi - \int_x^b \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} f(\xi) d\xi.$$

Cette forme de l'intégrale est celle dont M. Picard se sert, tant dans ses cours à la Sorbonne que dans ses travaux (*Journal de Liouville*, 1890 et 1893). On peut confondre ces deux quadratures en une seule et écrire

$$u = - \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

si l'on convient de désigner par $G_1(x, \xi)$ une fonction de ξ ainsi définie :

$$G_1(x, \xi) = \frac{(b-x)(\xi-a)}{b-a} \quad \text{pour } \xi < x,$$

$$G_1(x, \xi) = \frac{(b-\xi)(x-a)}{b-a} \quad \text{pour } \xi > x.$$

Cette fonction peut être regardée comme la fonction de Green relative au segment de droite ab . Elle se trouve déterminée par les quatre propriétés caractéristiques suivantes :

1° Elle satisfait à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{d\xi^2} = 0$.

2° Elle est finie et continue dans tout l'intervalle (a, b) , même pour $\xi = x$.

3° La dérivée première est continue elle aussi, sauf pour $x = \xi$, où elle possède deux valeurs distinctes, dont la différence est égale à -1 .

4° Elle s'annule aux deux limites de l'intervalle.

Une cinquième propriété, exprimée par la relation

$$G_1(x, \xi) = G_1(\xi, x)$$

et une sixième, qui consiste en ce que $G_1(x, \xi)$ est positive à l'intérieur de l'intervalle, sont des conséquences des quatre premières.

Dans la théorie du potentiel, on s'est occupé du cas où ce n'est pas la fonction u elle-même qui doit s'annuler sur le contour, mais bien une combinaison linéaire, à coefficients constants, de la fonction et de sa dérivée prise dans le sens de la normale extérieure. On l'écrit habituellement

$$hu + \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Pour les formules suivantes, il sera plus commode d'introduire au lieu de h sa valeur réciproque et d'écrire

$$u + \gamma \frac{\partial u}{\partial n}.$$

De même on a, dans notre cas, le problème de déterminer la fonction u par les conditions

$$u - \gamma \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = a,$$

$$u + \gamma \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = b,$$

la direction positive de l'axe des x entrant dans l'intervalle à

$x = a$ et en sortant à $x = b$. On obtient de ce problème une solution de la même forme que celle du problème spécial ($\gamma = 0$), si l'on introduit une fonction $G_3(x, \xi)$ ainsi définie

$$G_3(x, \xi) = \frac{(b + \gamma - x)(\xi - a + \gamma)}{b - a + 2\gamma} \quad \text{pour } \xi < x;$$

$$G_3(x, \xi) = \frac{(b + \gamma - \xi)(x - a + \gamma)}{b - a + 2\gamma} \quad \text{pour } \xi > x.$$

Elle a les mêmes propriétés que la fonction G_1 , à l'exception de la troisième, qui se trouve remplacée par

$$G - \gamma \frac{dG}{d\xi} = 0 \quad \text{pour } \xi = a,$$

$$G + \gamma \frac{dG}{d\xi} = 0 \quad \text{pour } \xi = b,$$

et de la sixième, qui n'a lieu que pour $\gamma > 0$. Or, c'est précisément cette dernière propriété qui a permis à M. Picard de mener à fin les démonstrations de convergence dans ses recherches sur l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, u),$$

en supposant données les valeurs de u pour $x = a$, $x = b$. On voit qu'on pourra employer les mêmes méthodes dans le cas $\gamma > 0$, le plus important en vue des applications; mais on devra chercher d'autres détours si l'on veut aborder le cas $\gamma < 0$. Quand

$$\gamma < -(b - a),$$

la fonction G est même négative dans tout l'intervalle et pour toutes les valeurs du paramètre x ; alors les méthodes de M. Picard rentrent en vigueur de nouveau, seulement on doit échanger entre eux les résultats relatifs au cas de $f > 0$ et ceux qui correspondent à $f < 0$.

La fonction G_3 relative à l'intervalle (a, b) est égale à la fonction G_1 relative à l'intervalle $(a - \gamma, b + \gamma)$, théorème dont l'analogue n'est pas connu dans le cas de plusieurs variables indépendantes.

Deux cas particuliers échappent à cette analyse; ce sont

$$\gamma = \infty \text{ (c'est-à-dire } h = 0) \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{1}{2}(b-a);$$

il n'y a pas de fonction de Green, à un seul point singulier, dans ces deux cas. En effet, il n'existe pas de fonction u satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, aux conditions de continuité et à la condition relative aux limites $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$, à moins que l'on n'ait

$$\int_a^b f(x) dx = 0;$$

et, si cette condition est remplie, il en existe une infinité, contenues toutes dans la formule

$$u = \int_a^x f(\xi)(x-\xi) d\xi + \lambda,$$

λ étant arbitraire.

De même, il n'existe pas de fonction u satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, aux conditions de continuité et aux conditions relatives aux limites

$$u + \frac{b-a}{2} \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = a,$$

$$u - \frac{b-a}{2} \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = b,$$

à moins que l'on n'ait

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) dx = 0;$$

et, si cette condition est remplie, il en existe une infinité contenues dans la formule

$$u = \int_a^x f(\xi)(x-\xi) d\xi + \lambda \left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

RÉSUMÉ D'UN MÉMOIRE SUR LA DÉTERMINATION D'UN TRIANGLE
AU MOYEN DES LONGUEURS DE SES BISSECTRICES;

Par M. BARBARIN.

I. Déterminer un triangle où l'on donne l'angle A et les longueurs des bissectrices des angles B, C.

Soient $B - C = 4\theta$, $\omega = \frac{3\pi}{4} - \frac{3A}{4}$, $x = \tan \theta$, $y = \cos 2\theta$,
 $z = \tan \frac{\omega}{3}$, $d_a, d_b, d_c, d'_a, d'_b, d'_c$ les longueurs, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$
les inverses des longueurs des six bissectrices des angles A, B, C,
les relations élémentaires entre les bissectrices et les angles con-
duisent aux équations du troisième degré de la forme générale

$$(1) \quad \frac{1 - x^2 + 2x \tan \frac{A}{2}}{1 - x^2 - 2x \tan \frac{A}{2}} - \frac{l_2}{l_1} \frac{P}{Q} = 0,$$

dans lesquelles l_1, l_2 sont les longueurs des bissectrices données, respectivement pour B et C, et P, Q des fonctions linéaires de x , dont les coefficients dépendent de la façon dont ces deux bissectrices sont associées, et des rapports d'inégalité entre A, B, C. L'équation (1) détermine x , et par conséquent les angles B, C, pourvu qu'elle ait une racine positive et inférieure à z . Il y a quatre combinaisons à faire, suivant que les bissectrices sont internes ou externes. Nous représentons par N le nombre des valeurs acceptables trouvées pour x dans chaque cas.

1^{re} Combinaison : $d_b = l_1, d_c = l_2$.

$$P = \tan \omega + x, \quad Q = \tan \omega - x, \quad N = 1,$$

2^e Combinaison : $d'_b = l_1, d'_c = l_2$.

$$A \text{ n'est pas l'angle moyen } P = \cot \omega - x, \quad Q = \cot \omega + x, \quad N = 1,$$

$$A \text{ est l'angle moyen... } P = -\cot \omega + x, \quad Q = \cot \omega + x, \quad N = 1, 2,$$

3^e Combinaison : $d_b = l_1, d_c = l_2$, avec $B \leq C$.

$$A > C \dots\dots\dots P = \tan \omega + x, \quad Q = 1 + x \tan \omega, \quad N = 0, 1, 2,$$

$$A < C \dots\dots\dots P = -\tan \omega - x, \quad Q = 1 + x \tan \omega, \quad N = 0, 1,$$

4^e Combinaison : $d_b = l_1, d'_c = l_2$, avec $B < C$.

$$A > B \dots\dots\dots P = 1 - x \tan \omega, \quad Q = \tan \omega - x, \quad N = 0, 1, 2,$$

$$A < B \dots\dots\dots P = 1 + x \tan \omega, \quad Q = \tan \omega - x, \quad N = 0, 1, 2.$$

Supposons les angles B, C connus par la résolution de l'une des équations (1). Pour achever la détermination du triangle, il faut mesurer la longueur l_3 de la bissectrice interne ou externe de A qui est concourante avec les bissectrices données de longueur l_1, l_2 . Pour fixer les idées, soient $d_b = l_1, d_c = l_2$, nous chercherons $d_a = l_3$ en calculant $\frac{1}{d_a} = x$. Si l'on pose

$$n^2 = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}, \quad p^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2},$$

on peut tirer x de l'une des équations

$$(2) \quad \begin{cases} 2y^3 - 2(\cos 2\omega + 2n^2 \sin^2 \Lambda)y^2 \\ \quad - (1 - \cos \Lambda)y + (1 - \cos \Lambda) \cos 2\omega = 0, \\ 2y^3 \sin \frac{\Lambda}{2} + 2(\cos \Lambda - p^2 \sin^2 \Lambda)y^2 \\ \quad - \left[2 \sin \frac{\Lambda}{2} + \cos 2\omega(1 + \cos \Lambda) \right] y + 1 - \cos \Lambda = 0, \end{cases}$$

où y a été calculé d'après l'équation (1). Mais il est intéressant d'avoir une équation donnant x indépendamment de θ . Pour cela, il n'y a qu'à éliminer y entre les équations (2), et si l'on fait, pour abréger,

$$u = 1 + \varepsilon^2, \quad v = 1 - \varepsilon^2, \quad t = u^2 - 16\varepsilon^2,$$

puis

$$\begin{aligned} X_2 &= 4u^2 + t, & X'_2 &= u^2 + t, & X_3 &= u(2u^2 + t), & X_4 &= 4u^4 - t^2, \\ Y_1 &= up^2 - 2vn^2, & Y_3 &= 2u^3n^2 - vtp^2, \end{aligned}$$

l'équation résultante a la forme

$$(3) \quad \begin{cases} [u^3X_2^2 - X_4(X_3 + 4v^2Y_1)]^2 \\ \quad - u[u^3X_2X'_2 + 2(Y_3 + 4v^2Y_1)(u^2t + 2vY_3)] \\ \quad \times [X_4X'_2 + 2X_2(u^2t + 2vY_3)] = 0, \end{cases}$$

et la racine commune aux équations (2) est

$$(4) \quad y = \frac{v[X_4X'_2 + 2X_2(u^2t + 2vY_3)]}{u^3X_2^2 - X_4(X_3 + 4v^2Y_1)}.$$

L'équation (3) est de degré pair et du troisième degré en $\frac{1}{x^2} = d_a^2$. Le coefficient de son terme en $\frac{1}{x^6}$ est négatif ou nul; donc elle a une racine positive qui peut aussi se calculer en fonction des données et de θ par l'une des équations (2) ou (4).

Donc il existe entre l'angle A et les longueurs des trois bissectrices concourantes internes une relation du troisième degré par rapport à ces longueurs, et qui, résolue en fonction de la bissectrice de l'angle A , admet une solution unique.

Quand on aura ainsi déterminé α , les côtés du triangle s'obtiendront par les équations linéaires

$$2\alpha \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad 2\beta \cos \frac{B}{2} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \quad 2\gamma \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Les autres combinaisons de bissectrices donneront lieu à des calculs de même nature, et l'on est ainsi conduit à cette proposition générale :

Entre l'angle A et les longueurs de trois bissectrices concourantes du triangle ABC , il existe une relation de la forme (3), qui est du troisième degré par rapport à la bissectrice de l'angle A et admet pour cette dernière autant de solutions que l'équation (1) correspondante a de racines positives et moindres que z .

Considérons encore la combinaison $d_b = l_1, d_c = l_2$; on a

$$\frac{d'a}{da} = \frac{z}{\alpha} = \cot 2\theta;$$

donc si l'on fait

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha'^2} = N^2, \quad \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha'^2} = P^2,$$

$$Y_1 = uP^2 - 2vN^2, \quad Y_3 = -2u^3N^2 - vtP^2, \quad Y_4 = 2(u^4 + 4z^2t)N^2 - vu^3P^2,$$

il existe, entre les longueurs des trois bissectrices non concourantes telles que d_b, d_c, d'_a et l'angle A , une relation de la forme

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & [vu^3(X_2 - 4uY_1)^2 - (X_3 - 4v^2Y_1)(vX_4 + 4uY_4)]^2 \\ & - u[2(X_3 - 4v^2Y_1)(vu^2t + 8z^2Y_4) + vu^3X'_2(X_2 - 4uY_1)] \\ & \times [2(X_2 - 4uY_1)(vu^2t + 8z^2Y_3) + X'_2(vX_4 + 4uY_4)] = 0, \end{aligned} \right.$$

du quatrième degré en d'_a et admettant pour cette ligne autant de valeurs que l'équation (1) correspondante a de racines admissibles.

11. *Déterminer un triangle où l'on donne les longueurs de trois bissectrices des angles A, B, C.*

1° Les longueurs données se rapportent à trois bissectrices concourantes.

Les relations de la forme (3) se réduisent à deux types ne différant entre eux que par le signe du coefficient de n^2 ou de $l_1 l_2$; il suffit donc d'envisager l'équation (3) elle-même, qui présente de curieuses propriétés. Comme les indices des polynomes X et Y y représentent leurs degrés en $z^2 = Z$, on voit qu'elle est du quatorzième degré. En la développant par rapport à v , elle admet la racine double $v^2 = 0$, et, par suite, son degré s'abaisse à douze. De plus, si l'on y change Z en $\frac{1}{Z} = Z'$ et si l'on pose $1 - Z' = v'$, la propriété des polynomes u et X, d'être tous réciproques, fait que l'équation (3) se transforme précisément en cette même équation où le coefficient de n^2 a seul changé de signe. Par suite, *dans l'équation du douzième degré, les coefficients extrêmes ou équidistants des extrêmes sont égaux au signe près de n^2 .*

En particulier,

$$\Lambda_0 = 320(p^2 + 2n^2)^2(1 - p^2 - 2n^2), \quad \Lambda_{12} = 320(p^2 - 2n^2)^2(1 - p^2 + 2n^2)$$

et, si les longueurs données l_1, l_2, l_3 satisfont à l'une des relations

$$\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3 = 0,$$

le degré s'abaisse encore d'une unité par la suppression d'une racine nulle ou infinie.

L'équation (3) résolue fait connaître z et Λ , et le problème proposé est ramené au précédent. Toutefois, z doit être positif et moindre que 1, et les longueurs données doivent permettre que la valeur correspondante de γ tirée de l'équation (4) soit positive et inférieure à 1.

2° Les longueurs données sont celles de trois bissectrices non concourantes.

Les relations de la forme (5) se réduisent encore à deux types ne différant entre eux que par le signe du coefficient de n^2 . L'équation (5) a absolument les mêmes propriétés que l'équa-

tion (3). Le degré seul diffère: il vaut 16 en général, sauf les simplifications particulières.

Pour ne citer qu'un seul cas particulier de la théorie générale, prenons le plus intéressant, celui où $l_1 = l_2$; il conduit à la proposition suivante, qui mérite d'être signalée :

Tout triangle qui a deux bissectrices égales est isocèle si ces bissectrices sont ensemble internes ou externes, à condition que, dans ce dernier cas, l'une d'elles appartienne à l'angle moyen. Mais si elles sont de nature différente, ou si, étant externes, aucune d'elles n'appartient à l'angle moyen, le triangle n'est pas nécessairement isocèle, excepté toutefois quand le troisième angle vaut 120° ou 60°.

III. *Construction graphique des racines des équations (1) et (3).*

En faisant $\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} = m$, l'équation (1) se trouve résolue par l'intersection des deux hyperboles

$$1 - x^2 = 2 \operatorname{tang} \frac{\Lambda}{2} x \tau_1,$$

$$x(mx - \tau_1) + \operatorname{tang} \omega (x - m\tau_1) = 0.$$

En faisant $\sin \frac{\Lambda}{2} = \lambda = \frac{v}{u}$, et prenant, par exemple, $n^2 = \frac{1}{2}$, $p = 2$, l'équation (3) se trouve résolue par l'intersection des courbes

$$Y = \frac{(4\lambda^2 + 1)(4\lambda^2 - 2) + 2(-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 1)(-8\lambda^4 + 16\lambda^2 + 2\lambda - 3)}{(4\lambda^2 + 1)^2 - (4\lambda^2 - 1)(5 - 4\lambda^2)(-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 1)},$$

$$Y = \frac{(4\lambda^2 + 1)^2 - (4\lambda^2 - 1)(5 - 4\lambda^2)(-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 1)}{(4\lambda^2 - 1)(4\lambda^2 - 2)(5 - 4\lambda^2) + 2(4\lambda^2 + 1)(-8\lambda^4 + 16\lambda^2 + 2\lambda - 3)},$$

la première du huitième degré, la seconde du septième, qui sont tangentes au point $\lambda = 0$, $Y = -1$ avec la droite $Y + 1 - \lambda = 0$ pour tangente commune, et ont deux points d'intersection distincts dans le voisinage de la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$.

Ainsi, quand on donne les longueurs des trois bissectrices internes, deux valeurs de z seules peuvent convenir, et à chacune ne répond qu'un seul triangle. Il y a, par conséquent, deux solutions et pas davantage. Les autres cas se traiteront semblablement.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 MAI 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. Cahen et M. Andrade, présentés par MM. D. André et Picquet.

Communications :

M. Bioche : *Sur des surfaces remarquables du troisième degré.*

M. Painlevé : *Sur les trajectoires d'un système matériel.*

M. Humbert : *Sur les complexes de coniques.*

M. Kœnigs : *Sur les aires engendrées à l'aide de roulettes.*

M. d'Ocagne : *Sur un abaque relatif à l'équation de Képler.*

M. Fouret : *Sur une surface du quatrième degré à droite double.*

M. L. LECORNU fait la Communication suivante (1) :

Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique.

Dans une Communication faite le 7 février dernier à la Société mathématique, M. Kœnigs a examiné le mouvement d'un point dans un plan, en supposant ce point attiré par deux axes rectangulaires en raison inverse du cube de la distance. Il a trouvé que, dans certains cas, le temps ne peut croître au delà d'une limite déterminée, et il a expliqué ce paradoxe en remarquant que la continuation du mouvement devient impossible parce que la vitesse et l'accélération acquièrent des valeurs infinies.

Je suis loin de vouloir contester cette conclusion; toutefois, il peut être bon de regarder les choses de plus près. Quand l'expression analytique d'une accélération passe par l'infini, il est toujours possible, en modifiant un peu les données, de faire en sorte que

(1) Annexe au compte rendu de la séance du 21 février.

cette expression devienne simplement *très grande*. On obtient alors un mouvement bien déterminé, et il est naturel de chercher comment se transforme ce mouvement quand on revient graduellement aux données initiales. Peu importe que les forces infinies n'existent pas dans la nature : la Mécanique rationnelle, il ne faut pas l'oublier, est une science purement abstraite, dont les hypothèses n'ont souvent qu'un rapport fort éloigné avec les phénomènes naturels.

Mais, pour que le passage à la limite eût un sens, il faudrait que le résultat final restât le même, quelle que fût la marche suivie, et nous allons voir que cette condition essentielle n'est pas remplie. Prenons d'abord un exemple tout à fait élémentaire. Dans son *Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle*, M. de Saint-Germain a traité le cas du mouvement rectiligne d'un point M attiré par une force inversement proportionnelle au cube de la distance à un point fixe A. Si le point A est situé sur la droite parcourue par M, l'intégrale à laquelle on parvient assigne au temps une limite supérieure. M. de Saint-Germain propose alors de regarder le mouvement dont il s'agit comme la limite de celui qu'on obtient quand le point attiré est assujéti à décrire une ligne droite ne contenant pas le point attirant, mais aussi voisine qu'on le voudra de ce dernier. Il est clair que le mouvement serait alors périodique et s'effectuerait symétriquement de part et d'autre de la projection du point attirant sur la droite. On est ainsi conduit à admettre que, dans le cas où le point attirant A appartient à la droite, le point mobile M oscille de part et d'autre de A, en prenant une vitesse infinie chaque fois qu'il coïncide avec A : analytiquement cette solution revient à changer la constante d'intégration à chaque passage.

Les mêmes considérations sont applicables au cas de l'attraction newtonienne. Mais le résultat auquel on parvient alors est en contradiction complète avec la note que la rédaction du *Bulletin* de la Société a jointe à l'article de M. Gascheau, publié en 1882 dans ce recueil; comme l'a rappelé M. Königs, cette note suppose que le mobile, en arrivant au centre d'attraction, va se réfléchir comme à la rencontre d'une bande élastique; et il est facile de voir pourquoi la rédaction conclut de cette manière. Si le mobile, au lieu de partir sans vitesse initiale ou avec une

vitesse dirigée vers le point attirant, était animé originairement d'une très petite vitesse perpendiculaire au rayon vecteur, il décrirait une ellipse très aplatie, ayant pour grand axe la direction de ce rayon vecteur, et reviendrait à son point de départ après avoir contourné de très près le centre d'attraction. En faisant tendre la vitesse initiale vers zéro, on parviendrait au genre de mouvement qu'indique la note.

Une pareille divergence n'a rien d'étonnant : elle prouve uniquement que la nature du mouvement limite dépend de la manière dont on procède pour substituer tout d'abord une force très grande à la force infinie.

Pour en revenir au problème de M. Kœnigs, on aperçoit également diverses manières d'éviter le passage des forces attirantes par l'infini.

On peut supposer, par exemple :

Ou bien que le mobile est assujéti à rester dans un plan parallèle à celui des droites attirantes, et aussi voisin qu'on le voudra de ce dernier ;

Ou bien que l'action de l'axe Oy est exprimée par $-\frac{A}{x^3} + \frac{\alpha}{x^4}$, α désignant une très petite constante positive, et que de même l'action de l'axe Ox a pour valeur $-\frac{B}{y^3} + \frac{\beta}{y^4}$.

Dans le premier cas, rien n'empêcherait le point attiré de se mouvoir dans toute l'étendue de son plan, et il traverserait avec une très grande vitesse la projection sur ce plan de chacune des droites attirantes. Dans le second cas, au moment où le mobile arriverait à la distance $\frac{\alpha}{A}$ de l'axe des y , l'attraction correspondante se changerait en une répulsion susceptible, pour des distances plus petites, de croître au delà de toute limite ; la même chose aurait lieu à la distance $\frac{\beta}{B}$ de l'axe des x : le point resterait indéfiniment confiné dans le même quadrant.

On pourrait encore imaginer d'autres combinaisons : citons seulement la substitution des formules d'attraction

$$-\frac{A}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad -\frac{B}{(y^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

à la place de $-\frac{A}{x^3}$ et $-\frac{B}{y^3}$. Avec ces formules, le mobile traverse sans difficulté les droites attirantes; mais, si l'on ne veut pas que l'attraction se change en répulsion, il faut considérer chaque droite comme étant une ligne de discontinuité pour la force correspondante, qui passe brusquement de $-\frac{A}{a^3}$ à $+\frac{A}{a^3}$ ou de $-\frac{B}{b^3}$ à $+\frac{B}{b^3}$.

Remarquons qu'à distance finie des droites attirantes, toutes ces hypothèses conduisent à des mouvements aussi peu différents qu'on le voudra de celui qui a été envisagé par M. Kœnigs : c'est seulement en approchant de l'une des droites que les divergences deviennent notables.

Il serait intéressant d'étudier complètement les trajectoires ainsi obtenues; mais, en le faisant ici, j'allongerais démesurément cette Note, et je m'écarterais de l'objet que je me suis proposé.

SÉANCE DU 16 MAI 1894.

PRÉSIDENTE DE M. DE COMBEROUSSE.

Communications :

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Fleury : *Sur certains faux principes et sur la règle de l'Hospital.*

M. Painlevé : *Identité de deux déterminants, suggérée par le principe de la moindre action.*

M. Laneelin : *Mouvement du pendule de longueur uniformément variable.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

RECHERCHES SUR LES SURFACES HARMONIQUES (RÉSUMÉ)

(Suite et fin) :

Par M. L. RAFFY.

Nous ne nous occupons dans ces *Recherches* que de déterminer des éléments linéaires jouissant de certaines propriétés assi-

gnées à l'avance. Ainsi nous trouvons, entre autres, tous ceux qui conviennent à des surfaces harmoniques en même temps qu'à des surfaces réglées ou à des spirales, et tous ceux qui sont doublement harmoniques. Il y aurait intérêt assurément à connaître les surfaces qui correspondent à ces éléments linéaires. Mais de pareils problèmes sont, en général, comme Ossian Bonnet l'a dit, au-dessus des forces de l'analyse actuelle. Plus d'un, d'ailleurs, parmi ceux que nous résolvons, présentait déjà des difficultés considérables, qu'on pourra mesurer aux ressources mises en œuvre pour les surmonter. Nous allons passer en revue les trois Parties de notre travail.

Première Partie ⁽¹⁾. — Nous commençons (Chap. I) par rappeler le théorème fondamental de M. Massieu et nous le mettons sous une forme particulière qui permet d'en faire deux applications importantes :

Pour qu'un élément linéaire donné

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit qu'on puisse, en choisissant convenablement les deux fonctions Λ et W de la seule variable v , satisfaire aux deux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial v} &= G \left(W + \Lambda' \int \frac{du}{G} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{G} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial u} - 3\Lambda \right) \right] &= \frac{2}{G \sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sqrt{G} \left(W + \Lambda' \int \frac{du}{G} \right) \right]. \end{aligned}$$

Comme première conséquence nous en déduisons (Chap. II) que toute surface harmonique à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution ⁽²⁾. Ce théorème permet de classer (deuxième Partie) les éléments linéaires harmoniques et intervient aussi (troisième partie) dans la recherche de ceux qui conviennent à des spirales.

⁽¹⁾ Publiée dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, année 1894.

⁽²⁾ L. RAFFY, Sur une classe de surfaces harmoniques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 424; 1891).

La seconde application (Chap. III) est la détermination complète des surfaces réglées harmoniques. Écartant celles de ces surfaces qui résultent de la déformation de la sphère, nous prouvons que *toutes les autres sont applicables sur des surfaces du second degré, réelles ou imaginaires, à moins qu'elles ne soient applicables sur des surfaces de révolution* ⁽¹⁾. Ce théorème les définit suffisamment, puisque l'on connaît toutes les déformations dans lesquelles les génératrices des surfaces réglées restent rectilignes. Au cours de la démonstration, nous donnons, sans les établir, des formules qui paraissent indispensables à l'étude des quadriques considérées comme surfaces réglées.

Le Chapitre IV est consacré aux intégrales linéaires et quadratiques de l'équation aux cercles géodésiques, telle que l'a présentée M. Darboux ⁽²⁾. Nous montrons d'abord que l'intégrale linéaire n'existe que pour les surfaces de révolution : c'est la réciproque d'une proposition de M. Darboux et la généralisation du premier théorème de M. Massieu. Nous étendons ensuite le second théorème de M. Massieu en prouvant que, s'il existe une intégrale quadratique, la surface est généralement harmonique; mais nous avons bien soin de discuter un cas particulier qui conduit à certaines surfaces représentables géodésiquement sur d'autres surfaces avec conservation d'une seule famille de lignes de longueur nulle. Il va sans dire que l'intégrale quadratique n'existe pas pour toutes les surfaces harmoniques. Nous formons l'équation fonctionnelle dont dépendent les éléments linéaires à intégrale quadratique et nous en indiquons diverses solutions.

Deuxième Partie ⁽³⁾. — La deuxième Partie a pour objet la *détermination des éléments linéaires doublement harmoniques*. Il s'agit de trouver *toutes les fonctions* $\varphi(x+y)$ et $f(x-y)$ qui vérifient, conjointement avec deux autres fonc-

(1) L. RAFFY, *Détermination des surfaces harmoniques réglées* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 223; 1890).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, Livre VI, Chap. VII.

(3) Publiée dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1^{re} série, tome X; 1894.

tions inconnues $X(x)$ et $Y(y)$, l'équation différentielle indéterminée

$$(E) \quad \begin{cases} (X'' + Y'')(\varphi - f) + 3(X' - Y')\varphi' \\ \quad - 3(X' + Y')f' + 2(X - Y)(\varphi'' - f'') = 0. \end{cases}$$

Pour en faciliter la résolution, nous commençons (Chap. I) par classer les éléments linéaires harmoniques en appliquant, avec des simplifications appropriées, la méthode des différentiations répétées, dont Abel a donné le principe. Cette analyse conduit à distinguer successivement les développables, puis les surfaces à courbure totale constante, puis les surfaces de révolution doublement harmoniques. Elle montre que, *si un élément linéaire donné sous la forme harmonique $(\varphi - f)dx dy$ n'appartient à aucune de ces trois catégories de surfaces, la différence $X - Y$ est déterminée à un facteur constant près*, ses deux dérivées logarithmiques pouvant être tirées de l'équation précédente. On arrive ainsi aux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel élément linéaire soit doublement harmonique.

Le Chapitre se termine par l'exposé de deux lois intuitives ⁽¹⁾ qui, bien qu'essentiellement distinctes, concourent à faire connaître des exemples nouveaux d'éléments linéaires doublement harmoniques; l'une est la *loi de passage*, l'autre la *loi de réciprocity*. La première détermine, dans tous les cas qui exigent des intégrations, l'ensemble des solutions X et Y qu'admet l'équation (E) quand les fonctions φ et f sont données. La seconde, qui permet, connaissant un système de solutions X , Y , φ et f de cette équation, d'en écrire un autre sans calcul, fournit alors de nouvelles solutions à l'aide des précédentes.

C'est pourquoi nous effectuons au Chapitre II la recherche de toutes les solutions de l'équation (E) quand $(\varphi - f)dx dy$ est l'élément linéaire d'une développable ou d'une surface à courbure constante.

Pour la même raison, je résume au Chapitre III les calculs par lesquels j'avais déterminé ⁽²⁾, ne connaissant pas la solution en-

⁽¹⁾ L. RAFFY, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CIX, p. 609; 1889)

⁽²⁾ L. RAFFY, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (Comptes rendus

core inédite de M. Darboux, les éléments linéaires des surfaces de révolution doublement harmoniques. J'établis en passant que *deux pareilles surfaces, choisies d'une manière quelconque, peuvent être représentées géodésiquement l'une sur l'autre*, et je donne toutes les solutions correspondantes de l'équation (E).

Avec le Chapitre IV nous abordons la recherche générale des éléments linéaires doublement harmoniques. Après les avoir classés d'après le nombre de leurs intégrales quadratiques, nous rappelons celui que M. Darboux a découvert,

$$ds^2 = \left[\frac{P}{(\xi - \tau_1)^2} + \frac{Q}{(\xi - \tau_2)^2} + \frac{P_1}{(1 + \xi \tau_1)^2} + \frac{Q_1}{(1 - \xi \tau_2)^2} \right] d\xi d\tau,$$

et [qui a déjà été mentionné précédemment. Nous montrons comment il devait nécessairement s'offrir dès qu'on appliquait ⁽¹⁾ les deux lois de passage et de réciprocité à l'élément linéaire $(x + y)^{-2} dx dy$ des surfaces à courbure constante et nous réunissons dans un tableau les dix solutions nouvelles auxquelles conduit cette application (les surfaces de révolution doublement harmoniques n'en fournissent pas). A ce moment, nous nous trouvons connaître, comme éléments doublement harmoniques : 1^o ceux des surfaces développables (six formes); 2^o ceux des surfaces à courbure totale constante (cinq formes); 3^o ceux des surfaces de révolution doublement harmoniques (seize formes); 4^o les éléments linéaires réciproques de ceux des développables (cinq formes); 5^o les éléments linéaires réciproques de ceux des surfaces à courbure totale constante (cinq formes).

Le reste du Chapitre est employé à démontrer qu'il n'en existe point d'autres, ainsi que je l'avais depuis longtemps pressenti ⁽²⁾. A cet effet, je commence par établir que *toutes les fonctions X, Y, z, f qui satisfont à l'équation (E) sont des fonctions uniformes*, propriété importante, dont j'expose deux démonstrations,

des séances de l'Académie des Sciences, t. CVIII, p. 493; 1889). — *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, p. 161; 1889).

⁽¹⁾ L. RAFFY, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CIX, p. 609; 1889).

⁽²⁾ *Même Communication.*

la première fondée sur les résultats précédemment acquis, la seconde directe. Toutes deux procèdent de cette remarque qu'il n'y a qu'à prouver l'uniformité de l'une des quatre fonctions X , Y , φ et f .

Toutes les solutions de l'équation (E), dans le cas des développables, des surfaces à courbure constante et des surfaces de révolution doublement harmoniques sont uniformes; il suffit donc de montrer qu'il en est encore de même quand l'élément linéaire $(\varphi - f)dx dy$ n'appartient à aucune de ces trois catégories de surfaces. C'est là l'objet du premier raisonnement : supposant que les fonctions considérées et leurs dérivées des deux premiers ordres n'ont aucune ligne de discontinuité, je montre en quelques lignes que, si X ou Y n'était pas uniforme, les dérivées logarithmiques de $X - Y$ dépendraient d'au moins une constante arbitraire, contrairement au théorème du Chapitre I.

La seconde démonstration ⁽¹⁾ repose sur la propriété de l'équation (E) de pouvoir être intégrée deux fois, de manière à fournir Y , par exemple, au moyen de quadratures, quand les autres fonctions sont considérées comme connues. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} (\varphi - f)^2 Y &= X(\varphi - f)^2 - 3X' \int \varphi^2(t) dt + 3X' \int f^2(z) dz \\ &\quad + \frac{X''}{2} (\Phi + F)^2 + \xi(x)(\Phi + F) - \xi_1(x), \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} t &= x + y, & \Phi(t) &= \int \varphi(t) dt, \\ z &= x - y, & F(z) &= \int f(z) dz, \end{aligned}$$

et désignant par ξ et ξ_1 deux fonctions de x introduites comme constantes d'intégration. Cette expression de Y contient x en apparence, mais en est indépendante. Pour établir qu'elle est fonction uniforme de y , j'emploie un mode de raisonnement nouveau, je crois, dans la théorie des fonctions et appelé à bien d'autres usages. Assignant à y une valeur fixe b et faisant décrire à *la variable* x dans son plan tous les chemins fermés qui ont pour origine et pour extrémité un point quelconque $x = a$, je montre que tous ces

⁽¹⁾ Cette démonstration, inachevée dans le texte primitif, est l'une des deux que le rapport de l'Académie vise comme insuffisantes.

chemins ramènent finalement la valeur initiale de Y , les diverses fonctions qui interviennent dans le problème étant supposées n'avoir que des points singuliers isolés. Ensuite, grâce à la forme linéaire des arguments $x + y$ et $x - y$ par rapport aux variables indépendantes x et y , je fais voir qu'à tout chemin décrit par la variable y dans son plan, partant de b pour y revenir, on peut substituer un chemin convenable décrit par la variable x dans son plan, du point a au point a , tandis que y garde constamment la valeur b . Ainsi se trouve complètement démontrée l'uniformité de la fonction Y et, par suite, de toutes les solutions de l'équation (E).

Ce résultat une fois acquis, je mets en évidence les théorèmes suivants :

I. Les quatre fonctions X, Y, φ, f ne présentent à distance finie d'autres singularités que des pôles doubles à résidu nul.

II. Si l'une d'elles admet plus d'un pôle à distance finie, les quatre fonctions sont périodiques; si l'une d'elles admet trois pôles formant un triangle, toutes les quatre sont doublement périodiques; si l'une d'elles n'a qu'un seul pôle à distance finie, les autres n'en ont pas davantage.

III. Si l'une d'elles est doublement périodique, l'élément linéaire rentre dans le type de *M. Darboux*.

Pour achever la solution, je résous ce problème beaucoup plus général :

Trouver toutes les fonctions $X(x)$ qui sont uniformes et qui deviennent des fonctions uniformes de ξ par le changement de variable

$$d\xi = \frac{dx}{\sqrt{\Lambda(x)}}.$$

On voit, en effet, immédiatement que les fonctions X qui vérifient l'équation (E) jouissent de cette double propriété.

En faisant décrire aux variables x et ξ les contours qui conduisent aux différentes déterminations des intégrales inverses

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{\Lambda(x)}}, \quad x = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi(\xi)}},$$

on s'assure que X et Ξ sont des fonctions périodiques de leurs arguments. Même après cette première réduction le problème nouveau semble loin d'être résolu, plus encore à cause de la nature en apparence si indéterminée des fonctions X et Ξ que de la multiplicité des cas particuliers correspondant aux hypothèses possibles sur le nombre de leurs périodes effectives (deux, un ou zéro). Mais, par un raisonnement fondé sur la considération des périodes des intégrales ξ et x , et qui convient à tous les cas, je montre qu'il existe une relation homographique à coefficients constants entre l'une des fonctions $p(\xi)$, $\sin^2 \xi$, e^ξ , ξ^2 ou ξ d'une part et l'une des fonctions $p(x)$, $\sin^2 x$, e^x , x^2 ou x d'autre part ⁽¹⁾. Cette relation détermine dans chaque cas les fonctions $X(x)$ et $\Xi(\xi)$. En lui donnant toutes les formes dont elle est susceptible, on retrouve naturellement toutes les expressions de X obtenues dans les Chapitres II et III ainsi que dans le présent, mais on n'en trouve aucune nouvelle.

Nous connaissons alors les formes analytiques, parfaitement déterminées, que peut revêtir X : ce sont certaines fonctions rationnelles, soit de $p(x)$, soit de e^x , soit de x lui-même, comportant au plus huit constantes arbitraires; ce sont aussi les formes possibles de Y et, d'après la loi de réciprocité, les fonctions φ et f n'en ont pas d'autres. La détermination complète de tous les éléments linéaires doublement harmoniques est ainsi ramenée à une pure question de calcul algébrique: substituer dans l'équation (E) les diverses expressions connues de X , Y , φ , f et déterminer les constantes arbitraires de façon que cette équation soit vérifiée quels que soient x et y . Les résultats précédemment acquis (en particulier les théorèmes I, II et III) et quelques considérations simples de périodicité réduisent considérablement le nombre des essais, et l'on établit en toute rigueur la proposition énoncée au début du Chapitre. Ainsi se trouve complètement résolu le problème des éléments linéaires doublement harmoniques.

Le Chapitre V traite des surfaces que M. Lie, dans son Mé-

(1) Nous négligeons les indéterminées qui pourraient multiplier les deux variables ou s'ajouter à elles. — Cette proposition n'était pas établie rigoureusement dans le texte primitif.

moire déjà citée, a appelées *surfaces de troisième classe*. Nous montrons que ces surfaces sont comprises parmi les surfaces doublement harmoniques, sauf une catégorie assez restreinte, qui peut n'y pas rentrer. La détermination de leurs éléments linéaires est implicitement contenue dans le Chapitre précédent, puisqu'il suffit de particulariser les constantes restées arbitraires dans nos formules pour satisfaire à l'équation du problème, que M. Lie a donnée sans la résoudre.

La *troisième classe* étant loin de comprendre tous les éléments linéaires doublement harmoniques, M. Lie a rencontré parfois de tels éléments linéaires, qu'il particularise aussitôt, pour les faire rentrer dans la troisième classe, mais sans mentionner leur propriété d'être doublement harmoniques. Il nous a suffi de la mettre en évidence sur trois d'entre eux pour arriver à cet énoncé, qui complète la théorie de la représentation géodésique : *Toute surface susceptible d'être représentée sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des deux familles de lignes de longueur nulle et sur d'autres avec conservation de ces deux familles est une surface doublement harmonique.*

Troisième Partie ⁽¹⁾. — L'objet de cette dernière Partie est la *détermination de tous les éléments linéaires harmoniques qui conviennent à des spirales.*

Au début du Chapitre I, j'indique les premières solutions du problème, fournies par le théorème de M. Maurice Lévy : *Tout élément linéaire homogène, de degré autre que — 2, appartient à une infinité de spirales.* Tel est le cas de celui-ci

$$(m) \quad ds^2 = (au^m - bv^m)(du^2 + dv^2),$$

qui est visiblement harmonique. En faisant croître ou décroître m indéfiniment, on en déduit ces deux autres

$$(e) \quad ds^2 = (e^{au} - e^{bv})(du^2 + dv^2),$$

$$(l) \quad ds^2 = (\log au - \log bv)(du^2 + dv^2),$$

qui conviennent également à des spirales. Ces solutions une fois

(1) Publiée dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, année 1895.

signalées, nous posons le problème dans toute sa généralité. Il s'agit de résoudre complètement, dans le cas des spirales, l'équation différentielle indéterminée

$$2X(\omega_x'' + \omega_x'^2) - 2Y(\omega_y'' + \omega_y'^2) + 3X'\omega_x' - 3Y'\omega_y' + X'' - Y'' = 0,$$

qui exprime que l'élément linéaire $e^{\omega} dx dy$ acquiert la forme harmonique par le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \quad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}}.$$

Comme on a, pour les spirales,

$$\omega = -i(x-y) + \int T(t) dt, \quad t = x+y,$$

il vient

$$(S) \begin{cases} 2X(T' + T^2 - 2iT - 1) - 2Y(T' + T^2 + 2iT - 1) \\ \quad + 3X'(T - i) - 3Y'(T + i) + X'' - Y'' = 0. \end{cases}$$

Telle est l'équation qui nous a permis ⁽¹⁾ de déterminer tous les éléments linéaires cherchés et, en outre, de distinguer ceux qui sont doublement harmoniques de ceux qui ne le sont point.

Avant d'en commencer la discussion, je fais voir que *pour les spirales simplement harmoniques les fonctions X et Y sont nécessairement de la forme*

$$X = Ae^{2rx}, \quad Y = Be^{-2ry},$$

A, B et r étant trois constantes dont la dernière peut être nulle. C'est pourquoi nous résolvons l'équation (S), d'abord en réduisant X et Y à des constantes, ce qui conduit à l'élément linéaire (e), puis en prenant pour X et Y les exponentielles; il faut alors intégrer une équation de Riccati; mais il est possible d'en trouver une solution et l'on arrive ainsi aux deux éléments linéaires (m) et (l).

Le Chapitre finit par la détermination ⁽²⁾ des éléments linéaires

⁽¹⁾ L. RAFFY, *Sur les spirales harmoniques* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXII, p. 518; 1891).

⁽²⁾ L. RAFFY, *Sur la déformation des surfaces spirales* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XIX, p. 65; 1891).

qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution. Ils rentrent tous dans le type

$$ds^2 = (x + y)^m dx dy,$$

trouvé par M. Lie pour l'élément linéaire des surfaces dont les géodésiques admettent plusieurs transformations infinitésimales conformes.

Au Chapitre II je traite complètement l'équation (S). En effectuant sur elle les transformations générales étudiées tout au début de la seconde Partie, on est conduit à distinguer d'abord les spirales à courbure constante, qui sont forcément des développables, puis les spirales applicables sur les surfaces de révolution; il n'y a lieu de revenir ni sur les unes ni sur les autres. Ces deux cas particuliers une fois écartés, l'équation (S) permet d'exprimer X' et Y' en fonction linéaire de X et Y , et comme ses coefficients ne dépendent que de T et T' , on a

$$(\tau) \quad X' = T_1 X + T_2 Y, \quad Y' = T_3 X + T_4 Y,$$

les lettres T_i désignant des fonctions rationnelles de T et de ses quatre premières dérivées. De ces expressions on pourrait déduire X'' et Y'' qui seraient linéaires et homogènes en X et Y . Substituant X' , Y' , X'' et Y'' dans l'équation (S), on trouverait un résultat de la forme

$$Xf_1(t) + Yf_2(t) = 0;$$

en sorte que, si le rapport $Y : X$ n'était pas une fonction de t , c'est-à-dire si l'on ne faisait pas

$$X = A e^{cx}, \quad Y = B e^{-cx},$$

hypothèse étudiée précédemment, on devrait poser

$$f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = 0.$$

Ce seraient là deux équations différentielles du cinquième ordre pour la fonction T , réductibles, il est vrai, au quatrième, puisque la variable indépendante n'y figurerait pas. Mais telle serait la complication de ces équations que, loin de pouvoir les discuter, on serait presque dans l'impossibilité de les écrire explicitement. C'est pourquoi je procède d'une tout autre façon. Laissant provisoirement de côté la recherche de la fonction T ,

je considère les fonctions T_i comme des fonctions inconnues, sans relation entre elles, et je démontre que le système (τ) admet deux solutions et deux seulement, savoir :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X = (\alpha x + \alpha) e^{cx}, & Y = (\beta y + \beta) e^{-cy}, \\ T_1 = \frac{AB}{ABt + \alpha \beta + \beta \alpha} + c, & T_3 = \frac{B^2 e^{-ct}}{ABt + \alpha \beta + \beta \alpha}, \\ T_2 = \frac{A^2 e^{ct}}{ABt + \alpha \beta + \beta \alpha}, & T_4 = \frac{AB}{ABt + \alpha \beta + \beta \alpha} - c; \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X = I e^{2rx} + \alpha e^{2hx}, & Y = m e^{-2ry} + \beta e^{-2hy}, \\ \Delta T_1 = 2B I r e^{(r-h)t} - 2 \alpha m h e^{-(r-h)t}, & \Delta T_3 = -2 \beta m (r-h) e^{-(r+h)t}, \\ \Delta T_2 = -2 \alpha I (r-h) e^{(r+h)t}, & \Delta T_4 = -2 \beta I h e^{(r-h)t} + 2 \alpha m r e^{-(r-h)t}, \\ & \Delta = B I e^{(r-h)t} - \alpha m e^{-(r-h)t}. \end{array} \right.$$

Dans les deux tableaux, tous les coefficients sont arbitraires, sous la seule restriction $r - h \neq 0$.

Les expressions ainsi obtenues pour X et Y ne sont que les types analytiques dans lesquels il faut chercher les solutions de notre problème. A cet effet, je les substitue dans l'équation (S), qui se décompose en deux autres, équivalentes à celles-ci

$$(T) \quad \left\{ \begin{array}{l} [3(T_1 + T_2 - T_3 - T_4) - 8i] T \\ + (2r + 2h - 3i)(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 0. \end{array} \right.$$

$$(\mathfrak{Z}) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4(T' + T^2 - 2rh - 1) + 3T(T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \\ + (2r + 2h - 3i)(T_1 - T_2 + T_3 - T_4) = 0. \end{array} \right.$$

Pour les expressions (I) des fonctions T_i qui correspondent à $r = h = c$, ces équations sont incompatibles. Il reste donc à discuter les solutions qui composent le système (II). On reconnaît d'abord que l'équation (T) peut se réduire à une identité, et l'on trouve ainsi un élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = e^{-i(x-y)} e^{-3t \frac{x+y}{2}} \cos \frac{x-y}{4} dx dy,$$

qui rentre dans le type (e) tout en admettant une infinité d'autres formes harmoniques.

Nous tirons ensuite de l'équation (T) l'expression de T pour la porter dans l'équation $(\mathfrak{Z})$. Le résultat de cette substitution est naturellement compliqué. On le simplifie par la mise en évidence du facteur Δ commun à tous ses termes; mais il reste encore une

fonction linéaire de huit exponentielles

$$e^{\pm rt}, \quad e^{\pm ht}, \quad e^{\pm(r-h)t}, \quad e^{\pm(r+h)t},$$

4

qu'il faut rendre identiquement nulle en déterminant convenablement les arbitraires A, B, l, m, r, h . La discussion du système d'équations algébriques auxquelles on est conduit comporte l'examen de cas assez nombreux, qui se rangent sous trois hypothèses principales :

- 1° Tous les exposants sont différents de zéro et différents les uns des autres ;
- 2° Tous les exposants sont différents de zéro, mais certains d'entre eux sont égaux ;
- 3° Certains exposants sont nuls.

La première hypothèse ne donne rien ; la troisième ne donne que des développables. La deuxième conduit à trois éléments linéaires

$$(2) \quad ds^2 = e^{-i(x-y)} \left(e^{i\frac{x+y}{5}} + e^{-3i\frac{x+y}{5}} \right) dx dy,$$

$$(3) \quad ds^2 = e^{-i(x-y)} \left(\cos \frac{x+y}{2} + \frac{5}{3} \right) dx dy,$$

$$(4) \quad ds^2 = e^{-i(x-y)} \cos \frac{x+y}{3} dx dy,$$

qui rentrent dans le type (m) tout en admettant une infinité de formes harmoniques. Le dernier est le seul qui convienne à des spirales doublement harmoniques et à des surfaces de révolution. Finalement, je conclus que *tous les éléments linéaires cherchés rentrent dans l'un des trois types (m) , (c) , (l) et que les seuls qui soient doublement harmoniques sont les éléments linéaires (1) , (2) , (3) et (4) .*

Le Mémoire se termine sur ce résultat. Je n'y aborde point la recherche des spirales qui admettent les éléments linéaires trouvés. Je renverrai à une Note que j'avais publiée antérieurement *Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire*. (Voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXII, p. 1421 ; 1891)

DÉMONSTRATION DES FORMULES FONDAMENTALES DE LA PÉRIMORPHIE ET DES FORMULES DE CODAZZI;

Par M. BALITRAND.

Les formules que nous allons établir ne diffèrent pas, au fond, de celles qui ont été données par Ribaucour ⁽¹⁾, et qui constituent la base de la méthode à laquelle il a donné le nom de *périmorphie*. Mais la démonstration de nos formules est plus simple, et la signification géométrique des éléments qui y figurent plus évidente. Elles conduisent immédiatement, et sous une forme très avantageuse, aux formules de Codazzi.

Étant donnés une courbe gauche (c) et un point M sur cette courbe, menons au point M le trièdre formé par la tangente Mx , la normale principale My et la binormale Mz , ou trièdre principal. On passe de la position $Mxyz$ à une position infiniment voisine par une translation ds et par une rotation dont les composantes sont $-\frac{ds}{r}$, 0, $\frac{ds}{\rho}$, φ et r désignant les rayons de courbure et de torsion de la courbe (c) au point M. Si x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace par rapport au trièdre principal, on a les formules ⁽²⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \delta x = dx + \left(1 - \frac{r}{\rho}\right) ds, \\ \delta y = dy + \left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r}\right) ds, \\ \delta z = dz - \frac{y}{r} ds. \end{cases}$$

la caractéristique δ se rapportant au déplacement absolu du point P, la caractéristique d au déplacement relatif.

⁽¹⁾ *Étude sur les elassoides* (Mémoires couronnés, publiés par l'Académie des Sciences de Belgique; 1881). — (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1891).

⁽²⁾ Ces formules sont très connues. M. Cesaro en a fait un emploi systématique dans l'étude intrinsèque des courbes gauches et les a étendues à l'hyperespace (*Annali di Matematica*; 1887 — *Rendiconti, della R. Accademia dei Lincei*; 1889). — Voir aussi le travail de M. ROUQUET, *Sur les formules fondamentales de la théorie des courbes gauches* (Mémoires de l'Académie des Sciences de Toulouse).

Si, au lieu du trièdre principal, on considère le trièdre formé par la tangente Mx et par deux droites My , Mz , situées dans le plan normal, la droite My étant inclinée d'un angle θ sur la binormale, on a les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \partial x = dx + ds + \frac{1}{\rho} (z \sin \theta - y \cos \theta) ds, \\ \partial y = dy + \frac{x \cos \theta}{\rho} ds - z \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds, \\ \partial z = dz + y \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds - \frac{x \sin \theta}{\rho} ds. \end{cases}$$

Passons aux éléments du second ordre. Les formules (1) donnent aisément

$$(3) \quad \begin{cases} \partial^2 x = d^2 x + d^2 s - y d \frac{ds}{\rho} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r} \right) ds^2 - 2 \frac{dy ds}{\rho}, \\ \partial^2 y = d^2 y + x d \frac{ds}{\rho} + z d \frac{ds}{r} - y \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} \right) ds^2 + 2 \frac{dx ds}{\rho} + 2 \frac{dz ds}{r}, \\ \partial^2 z = d^2 z - y d \frac{ds}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{x}{\rho} + \frac{z}{r} \right) ds^2 - 2 \frac{dy ds}{r}, \end{cases}$$

et les formules (2) les suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \partial^2 x = d^2 x + d^2 s + z d \frac{\sin \theta ds}{\rho} - y d \frac{\cos \theta ds}{\rho} \\ \quad + \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) \Pi - K^2 x + \frac{2 ds}{\rho} (\sin \theta dz - \cos \theta dy), \\ \partial^2 y = d^2 y + x d \frac{\cos \theta ds}{\rho} - z d \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds \\ \quad + \frac{\sin \theta}{\rho} \Pi - K^2 y + \frac{2 dx ds \cos \theta}{\rho} - 2 \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) dz ds, \\ \partial^2 z = d^2 z + y d \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds + x d \frac{\sin \theta ds}{\rho} \\ \quad + \frac{\cos \theta}{\rho} \Pi - K^2 z + 2 \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) dy ds - \frac{2 dx ds \sin \theta}{\rho}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(5) \quad \begin{cases} \Pi = x \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) ds^2 + \frac{1}{\rho} (y \sin \theta + z \cos \theta) ds^2, \\ K^2 = \frac{ds^2}{\rho^2} + \left(\theta' - \frac{1}{r} \right)^2 ds^2. \end{cases}$$

Considérons maintenant une surface de référence (s) qui, rap-

portée à deux systèmes de courbes orthogonales, admet pour élément linéaire

$$ds^2 = f^2 du^2 + g^2 dv^2.$$

Considérons le trièdre principal formé par la normale à la surface Oz et par les tangentes Ox et Oy aux courbes (u) et (v) , et soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace par rapport à ce trièdre. Lorsqu'on passe de la position $Oxyz$ à une position infiniment voisine $O'x'y'z'$, on a les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x = dx + g dv + \frac{1}{\rho_1} (z \sin \theta_1 - y \cos \theta_1) g dv + \left[z \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right) - \frac{y \cos \theta_1}{\rho} \right] f du, \\ \delta y = dy + f du + \left[\frac{x \cos \theta_1}{\rho_1} - z \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right) \right] g dv + \frac{1}{\rho} (z \sin \theta - y \cos \theta) f du, \\ \delta z = dz + \left[y \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right) - \frac{x \sin \theta_1}{\rho_1} \right] g dv + \left[\frac{y \sin \theta}{\rho} - x \left(\theta' - \frac{1}{r} \right) \right] f du. \end{array} \right.$$

On les obtient en appliquant les formules (2) à deux déplacements successifs effectués suivant (u) et (v) ; ρ_1 et r_1 désignent les rayons de courbure et de torsion de la courbe (u) , θ_1 l'angle de son plan osculateur avec le plan tangent à la surface; ρ, r, θ ont la même signification pour la courbe (v) .

Nous poserons

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{g \cos \theta_1}{\rho_1}, \quad P = \frac{g \sin \theta_1}{\rho_1}, \quad R = g \left(\theta'_1 - \frac{1}{r_1} \right), \\ N = \frac{f \cos \theta}{\rho}, \quad Q = \frac{f \sin \theta}{\rho}, \quad S = f \left(\theta' - \frac{1}{r} \right). \end{array} \right.$$

Les six quantités M, N, P, Q, R, S ont une signification géométrique bien connue, et les formules (6) s'écrivent alors

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x = dx + g dv + z(P dv + S du) - y(M dv + N du), \\ \delta y = dy + f du + x(M dv + N du) - z(R dv + Q du), \\ \delta z = dz + y(R dv + Q du) - x(L dv + S du). \end{array} \right.$$

Les conditions de fixité du point x, y, z dans l'espace sont données par les six relations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} + S z - N y = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial v} + g + P z - M y = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial u} + f + N x - Q z = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} + M x - R z = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial u} + Q y - S x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} + R y - P x = 0, \end{array} \right.$$

et celles de la direction l, m, n par les relations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial l}{\partial u} + S n - N m = 0, & \frac{\partial l}{\partial v} + P n - M m = 0, \\ \frac{\partial m}{\partial u} + N l - Q n = 0, & \frac{\partial m}{\partial v} + M l - R n = 0, \\ \frac{\partial n}{\partial u} + Q m - S l = 0, & \frac{\partial n}{\partial v} + R m - P l = 0. \end{array} \right.$$

Pour exprimer les conditions d'invariabilité d'une droite, il faut joindre aux conditions d'invariabilité de sa direction celles de la fixité d'un de ses points. Si la droite

$$\frac{X-x}{l} = \frac{Y-y}{m} = \frac{Z-z}{n}$$

est donnée par ses six coordonnées

$$l, m, n, \quad l' = ny - mz, \quad m' = lz - nx, \quad n' = mx - ly,$$

il faut joindre aux relations (10) les relations qui expriment la fixité du vecteur l', m', n' .

Le plan

$$lx + my + nz - p = 0$$

sera fixe dans l'espace, si aux conditions (10) on ajoute les relations

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -mf, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -lg.$$

Exprimons que les dérivées de l, m, n fournies par les relations (10) satisfont aux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial l}{\partial v}, \quad \dots;$$

on obtient ainsi les relations

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial u} - \frac{\partial N}{\partial v} + PQ - RS = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial v} + RN - QM = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial v} + SM - PN = 0. \end{array} \right.$$

Opérant de même sur les dérivées de x , y , z tirées des équations (9) et tenant compte de (11), on trouve

$$(12) \quad M = -\frac{1}{f} \frac{\partial g}{\partial u}, \quad N = \frac{1}{g} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad Rf + Sg = 0.$$

Ce sont les formules de Codazzi (1).

Pour faire une application des formules précédentes, prenons la représentation sphérique de la surface de référence.

Par un point fixe O de l'espace, menons une parallèle à la normale à la surface au point M, parallèle sur laquelle nous prenons une longueur constante $OP = a$. Les formules (8) nous donnent pour les coordonnées x , y , z du point P

$$\delta x = a(P dv + S du), \quad \delta y = -a(R dv + Q du), \quad \delta z = 0;$$

d'où, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$(13) \quad d\sigma^2 = a^2(P dv + S du)^2 + a^2(R dv + Q du)^2.$$

Le système orthogonal de la surface de référence admettra, comme représentation sphérique, un système orthogonal si $R = 0$, $S = 0$, ce qui donne les lignes de courbure; ou bien si $P = 0$, $Q = 0$, ce qui donne les surfaces minima; et il est bien évident que ce sont les seuls cas où cela puisse avoir lieu.

Si les lignes (u) et (v) sont les lignes de courbure de la surface (S), l'expression (13) devient

$$d\sigma^2 = a^2 \left(\frac{g^2 dv^2}{R_1^2} + \frac{f^2 du^2}{R^2} \right) = a^2 d\sigma^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R^2} \right),$$

α désignant l'angle que fait la courbe considérée avec la courbe (u) . On voit que la ligne définie par la relation

$$\frac{\cos^2 \alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R^2} = \frac{1}{a^2}$$

(1) CODAZZI, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*; 1882.

O. BONNET, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*; 1867).

Sur les formules fondamentales de la périmorphie on peut consulter, outre les Mémoires de Ribaucour, les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de M. Darboux, et le Tome VII du *Traité d'Analyse* de M. Laurent.

est égale en arc à sa représentation sphérique. On voit encore que la représentation sphérique d'une surface minima réalise un tracé géographique de la surface sur la sphère.

L'angle V d'une courbe avec sa représentation sphérique est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V = \pm \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) fg \, du \, dv}{\frac{f^2 \, du^2}{R} + \frac{g^2 \, dv^2}{R_1}}.$$

Cette relation, nouvelle croyons-nous, montre que, par chaque point d'une surface, passent quatre lignes faisant un angle donné avec leur représentation sphérique. Ces quatre lignes sont toutes réelles ou toutes imaginaires. Il n'y a d'exception que si

$$\frac{f^2 \, du^2}{R} + \frac{g^2 \, dv^2}{R_1} = 0,$$

ce qui correspond aux lignes asymptotiques; et l'on voit que la représentation sphérique d'une ligne asymptotique est perpendiculaire à cette ligne, propriété bien connue.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUIN 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. D. André : *Sur le triangle des séquences.*

M. Painlevé : *Sur une démonstration de l'existence des fonctions implicites analytiques.*

M. Humbert : *Sur quelques propriétés des arcs des courbes gauches.*

M. E. Genty adresse une Note *Sur les surfaces à courbure totale constante.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Adam : *Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux.*

M. Fouret : *Sur un théorème relatif aux quadriques.*

M. Lancelin : *Sur deux cas particuliers du problème des trois corps.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE PAR CERTAINES CONDITIONS AUX LIMITES;

Par M. ÉMILE PICARD.

1. Une question posée par M. Carvallo dans le dernier numéro de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (question 173) me remet en mémoire quelques remarques que j'ai faites autrefois sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. Considérons l'équation

$$(E) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + c z,$$

a , b , c étant des fonctions continues de x et y . Dans mon Mémoire sur les approximations successives (*Journal de Mathématiques*, 1890, Chap. II), j'ai montré comment une méthode d'approximations permettait d'intégrer cette équation en se donnant diverses conditions aux limites. Prenons maintenant le cas suivant : on veut avoir l'intégrale de cette équation telle que

$$(1) \quad \begin{cases} z = f(x) & (\text{pour } y = 0), \\ z = \varphi(x) & (\text{pour } y = x); \end{cases}$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions arbitrairement données. On a seulement, bien entendu, $f(0) = \varphi(0)$.

2. Je fais d'abord les remarques suivantes. L'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

satisfaisant aux conditions précédentes, est évidemment

$$z = f(x) + \varphi(y) - f(y).$$

Ensuite l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = P(x, y),$$

P étant une fonction donnée et telle que

$$(2) \quad \begin{cases} u = 0 & (\text{pour } y = 0), \\ u = 0 & (\text{pour } y = x). \end{cases}$$

se réduit à

$$u = \int_0^y d\tau_1 \int_y^x P(\xi, \tau_1) d\xi.$$

3. Ceci posé, je forme les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} &= a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} &= a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}. \end{aligned}$$

On calcule z_0 de façon qu'il satisfasse aux conditions (1), et les u de façon qu'ils satisfassent aux conditions (2). Il est aisé d'établir que la série

$$(3) \quad z_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

résout le problème proposé. Si les a , b , c ainsi que $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont bien déterminées et continues dans un rectangle parallèle

aux axes et comprenant l'origine, la série (3) convergera dans ce rectangle. Si, en particulier, les fonctions précédentes sont bien déterminées et continues dans tout le plan (x, y) , il en sera de même de la solution que nous venons d'obtenir.

4. Le problème précédent pourrait être généralisé. On peut se proposer de trouver l'intégrale z de l'équation (E) telle que

$$\begin{aligned} z &= f(x) && (\text{pour } y = \alpha x), \\ z &= \varphi(x) && (\text{pour } y = \beta x), \\ &[f(0) = \varphi(0)]; \end{aligned}$$

α et β sont deux constantes réelles, et l'on doit supposer que α^2 est différent de β^2 . Les mêmes considérations sont applicables; les choses se présentent toutefois moins simplement, car l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

satisfaisant aux conditions précédentes, ne s'obtient pas ici immédiatement comme au n° 2. Soit, en effet,

$$z = \lambda(x) + \mu(y);$$

on aura

$$\begin{aligned} \lambda(x) + \mu(\alpha x) &= f(x), \\ \lambda(x) + \mu(\beta x) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

et, par suite, l'équation fonctionnelle

$$\mu(\alpha x) - \mu(\beta x) = f(x) - \varphi(x).$$

Si l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur

$$\chi(x) = f(x) - \varphi(x),$$

on ne peut résoudre cette équation fonctionnelle. Tout d'abord nous ne diminuons pas la généralité en supposant $\alpha = 1$, $|\beta| < 1$. Si de plus on suppose la fonction $\chi(x)$ telle que

$$|\chi(x)| < A |x|^p,$$

A et p étant des constantes positives, on pourra prendre

$$\mu(x) = \chi(x) + \chi(\beta x) + \dots + \chi(\beta^n x) + \dots$$

et la solution du problème s'achèvera aisément.

5. La question posée par M. Carvallo, dont j'ai parlé plus haut, était relative à l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - u,$$

se réduisant pour $r = 0$ à une fonction $f(t)$, et à $f(0)$ pour $r = t$. Un simple changement de variables ramène ce problème à celui que nous avons traité d'une manière générale au n° 3.

SUR LES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE;

Par M. E. GENTY.

Dans son remarquable Mémoire *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces*, M. Cosserat donne un certain nombre de formules, qui établissent une liaison étroite entre la théorie des surfaces et celle des congruences des droites.

Nous allons montrer, dans cette Note, comment la théorie des congruences conduit simplement, pour les surfaces à courbure totale constante, aux transformations de MM. Bianchi et Bäcklund (DARBOUX, *Leçons*, t. III, p. 420 à 438).

En conservant toutes les notations de M. Cosserat, on sait que la demi-distance focale φ d'une congruence rectiligne donnée par la représentation sphérique de ses développables satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \beta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f \right) \varphi = 0.$$

Si l'on a

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + f = 0,$$

l'équation (1) sera vérifiée par $\varphi = \text{const.}$, et, dans ce cas, les équations qui expriment que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la surface focale prennent la forme

$$\frac{\beta}{x_1} = \frac{\gamma}{\beta_1} = \frac{\beta_1 \gamma - \beta^2 - c}{\beta_1^2 - x_1 \beta + c} = - \frac{c}{c}$$

ou

$$(3) \quad \begin{cases} e^2 \varrho + g^2 x_1 = 0, \\ e^2 \gamma + g^2 \varrho_1 = 0. \end{cases}$$

Or on a

$$h^2 x_1 = e \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v} \right) - \frac{f}{2} \frac{\partial e}{\partial u},$$

$$h^2 \varrho = \frac{g}{2} \frac{\partial e}{\partial v} - \frac{f}{2} \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$h^2 \varrho_1 = \frac{e}{2} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{f}{2} \frac{\partial e}{\partial v},$$

$$h^2 \gamma = g \left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u} \right) - \frac{f}{2} \frac{\partial g}{\partial v},$$

où l'on a posé

$$h^2 = ef - g^2.$$

En tenant compte de ces relations, on met les équations (3) sous la forme

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial u} = \frac{\partial \log (eg)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial v} = \frac{\partial \log (eg)}{\partial v};$$

d'où

$$\frac{f^2}{eg} = \cos^2 \theta = \text{const.},$$

ce qui montre que les plans tangents aux points F_1 et F_2 des deux nappes de la surface focale se coupent sous un angle constant θ .

La réciproque est évidente et, si φ et θ sont des constantes, les lignes de courbure et, par suite aussi, les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

La courbure totale au point F_1 de la première nappe a alors pour expression, en supposant $2\varphi = 1$,

$$\frac{1}{R_1 R'_1} = \frac{h^2 \gamma_1}{g^2 \varrho_1} = - \frac{h^2}{eg} = - \sin^2 \theta;$$

on trouve de même, pour la courbure totale au point F_2 de la seconde nappe,

$$\frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{h^2 x_1}{e^2 \varrho} = - \sin^2 \theta;$$

donc les deux nappes de la surface focale ont leur courbure totale constante et égale à $-\sin^2 \theta$.

Les lignes de courbure des deux nappes ont pour équation

$$(4) \quad \beta \beta_1 du^2 + (\beta_1 \gamma - \beta^2 - g) du dv - \beta \gamma dv^2 = 0,$$

et l'équation définissant les rayons de courbure principaux de la seconde nappe prend la forme

$$(5) \quad \alpha_1 h^2 R^2 - h \sqrt{e} (\alpha_1 \beta + \beta_1^2 + e) R + e^2 \beta = 0.$$

Soit (du, dv) l'une des solutions de l'équation (4); le plan normal à cette direction mené par le point F_1 , lequel est un plan principal de la nappe (F_1) , rencontre la normale de la seconde nappe en un point A , et, si l'on désigne par R la distance $F_2 A$, on reconnaît très simplement que cette distance est définie par l'équation

$$\beta_1 du - \beta dv + \frac{h R dv}{\sqrt{e}} = 0.$$

Si l'on élimine du et dv entre cette équation et l'équation (4), il vient

$$\beta (\beta \sqrt{e} - h R)^2 + \sqrt{e} (\beta_1 \gamma - \beta^2 - g) (\beta \sqrt{e} - h R) - \beta \beta_1 \gamma e = 0.$$

En développant cette équation et tenant compte des relations (3), on retrouve l'équation (5). Donc :

Si deux surfaces se correspondent point par point de telle manière que la distance entre ces deux points soit constante, et que les deux plans tangents en ces deux points contiennent la droite qui les joint et forment entre eux un angle constant θ , les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, pour lesquelles les courbures totales sont constantes et égales à $-\frac{\sin^2 \theta}{p^2}$, p étant la distance constante des deux points correspondants.

Pour $\theta = 90^\circ$, on a la transformation de M. Bianchi; si θ est un angle quelconque, on a la transformation de M. Bäcklund.

Dans le premier cas, la congruence est une congruence de normales et l'équation (1) devient

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial v^2} = 0,$$

On en déduit immédiatement

$$eg = \gamma(u) \psi(v),$$

ou, en particulierisant convenablement les paramètres,

$$(7) \quad eg = 1.$$

La relation qui précède, jointe à $f = 0$, caractérise la représentation sphérique des surfaces pour lesquelles la différence des rayons de courbure est constante.

Remarquons enfin que, dans ce cas, l'élément linéaire de la surface (F_1) a pour expression

$$ds^2 = (\beta_1 du - \beta dv)^2 + e dv^2 :$$

or la relation (6) montre qu'on peut poser

$$\beta_1 du - \beta dv = du_1.$$

On a donc

$$ds^2 = du_1^2 + e dv^2,$$

ce qui montre que v est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur (F_1) . On verrait de même que u est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur (F_2) .

Les trajectoires orthogonales de ces géodésiques se correspondent sur les deux nappes et elles ont pour équation différentielle

$$\beta_1 du - \beta dv = 0,$$

ou

$$e \frac{\partial g}{\partial u} du - g \frac{\partial e}{\partial v} dv = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial \log e}{\partial v} dv - \frac{\partial \log g}{\partial u} du = 0.$$

ou enfin, en tenant compte de la relation (7),

$$\frac{\partial \log e}{\partial u} du + \frac{\partial \log e}{\partial v} dv = 0.$$

Donc leur équation finie est $e = \text{const.}$

SUR LES SURFACES ADMETTANT POUR LIGNES DE COURBURE
DEUX SÉRIES DE CERCLES GÉODÉSIQUES ORTHOGONAUX:

Par M. PAUL ADAM.

Dans son Mémoire célèbre sur la déformation des surfaces (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier) O. Bonnet a déterminé la surface la plus générale admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux. Sa méthode, qui repose sur l'emploi des formules de Codazzi, donne lieu à des calculs, sinon pénibles, du moins fort longs : la formation des équations de la surface prend dix-sept pages.

Or, si les formules de Codazzi facilitent, dans bien des cas, la résolution des problèmes, il en est d'autres où le contraire a lieu. Ici, par exemple, on peut déterminer les surfaces en question par une marche beaucoup plus simple que celle de Bonnet.

Si l'on écrit le ds^2 d'une surface isothermique

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

la détermination d'une telle surface revient à la recherche de trois solutions x, y, z de l'équation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} = 0,$$

liées entre elles par la condition

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Les surfaces qui admettent pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux, ayant pour ds^2

$$ds^2 = \frac{1}{(U + V)^2} (du^2 + dv^2),$$

il suffit, pour les obtenir, de trouver trois solutions de l'équation suivante

$$(2) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + \frac{V'}{U + V} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{U'}{U + V} \frac{\partial h}{\partial v} = 0$$

et d'avoir égard à (1).

L'équation (2) s'intègre tout de suite et donne

$$(3) \quad \theta = \frac{U_1 + V_1}{U + V},$$

où les lettres ont une signification évidente.

Il faut donc prendre pour x , y , z trois expressions de la forme (3), en leur donnant, bien entendu, le même dénominateur $U + V$, puis déterminer les fonctions qui entrent en numérateur par la condition (1).

On peut évidemment, en prenant U et V pour nouvelles variables, écrire

$$x, y, z = \frac{U_1 + V_1, U_2 + V_2, U_3 + V_3}{u + v},$$

x , y , z étant toujours astreintes à la relation (1), laquelle fournit

$$(4) \quad \begin{cases} (u+v)^2(U_1'V_1' + U_2'V_2' + U_3'V_3') \\ - (u+v)[(U_1+V_1)(U_1'+V_1') \\ + (U_2+V_2)(U_2'+V_2') + (U_3+V_3)(U_3'+V_3')] \\ + (U_1+V_1)^2 + (U_2+V_2)^2 + (U_3+V_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Cette équation fonctionnelle paraît compliquée; mais, si l'on pose

$$(U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 = 2(u + v) \varphi(u, v),$$

elle se réduit à

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0,$$

de sorte qu'elle revient à

$$(5) \quad (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + (U_3 + V_3)^2 + 2(u + v)(U_4 + V_4) = 0.$$

Cette équation, étant développée, a pour premier membre une somme de termes de la forme $F(u)\Phi(v)$. Or l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i B_i = 0,$$

dans laquelle les A dépendent d'une variable α et les B d'une autre variable β , admet, outre les deux solutions évidentes qui

consistent à annuler soit tous les A , soit tous les B , $n - 1$ autres solutions définies par les formules

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{k=1}^{k=l} a_k^j A_k, & j &= l+1, \quad l+2, \quad \dots, \quad n, \\ -B_{j'} &= \sum_{k=l+1}^{k=n} a_{j'}^k B_k, & j' &= 1, \quad 2, \quad 3, \quad \dots, \quad l, \end{aligned}$$

dans lesquelles les a sont des constantes arbitraires; et ces $n - 1$ solutions s'obtiennent en donnant à l les valeurs $1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Appliquons cela à l'équation (5) développée, en faisant jouer aux fonctions de u et de v ci-après le rôle des fonctions A et B écrites en regard :

1	$A_1,$	$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 2V_4v$	$B_1,$
u	$A_2,$	$2V_4$	$B_2,$
U_1	$A_3,$	$2V_1$	$B_3,$
U_2	$A_4,$	$2V_2$	$B_4,$
U_3	$A_5,$	$2V_3$	$B_5,$
U_4	$A_6,$	$2v$	$B_6,$
$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + 2U_4u$	$A_7,$	1	$B_7,$

En ayant égard à la symétrie de l'équation (5), on voit qu'il n'y a, pour cette équation, que deux solutions à essayer, celles qui correspondent à $l = 2$ et à $l = 3$. En effet, si l'on change le classement qui vient d'être indiqué pour les fonctions de u et de v ci-dessus, en rangeant les fonctions de v dans l'ordre inverse de celui qu'avaient les fonctions analogues de u , les hypothèses $l = 4$ et $l = 5$ conduiront aux mêmes solutions de l'équation (5), sauf remplacement de u par v et de v par u , que les hypothèses $l = 3$ et $l = 2$. On aboutira donc pour les coordonnées de la surface aux expressions données par $l = 3$ et $l = 2$, où l'on changerait u en v et v en u .

1^o *Hypothèse* $l = 2$. — Dans cette hypothèse, U_1 , U_2 et U_3 sont des fonctions linéaires de u ; il en résulte que, par un transport des axes parallèlement à eux-mêmes, les coordonnées de la

surface peuvent être ramenées à la forme

$$(6) \quad \frac{\varphi(v)}{u+v};$$

la surface serait alors un cône dont les génératrices auraient pour paramètre v ; tous les cônes répondent évidemment à la question; toutefois, en achevant le calcul, on reconnaît que des coordonnées de la forme (6) ne peuvent vérifier la relation (1); cela tient à ce que nous avons particularisé les fonctions U et V , et qu'il faudrait actuellement faire $V = 0$ pour que les courbes (u) pussent être, sur le cône, les trajectoires orthogonales des génératrices.

2° *Hypothèse* $l = 3$. — Il vient alors,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_2 = a_1^4 + a_2^4 u + a_3^4 U_1, \\ U_3 = a_1^5 + a_2^5 u + a_3^5 U_1, \\ U_4 = a_1^6 + a_2^6 u + a_3^6 U_1, \\ U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + 2U_4 u = a_1^7 + a_2^7 u + a_3^7 U_1, \\ -(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 2V_4 v) = 2a_1^4 V_2 + 2a_1^5 V_3 + 2a_1^6 v + a_1^7, \\ -2V_4 = 2a_2^4 V_2 + 2a_2^5 V_3 + 2a_2^6 v + a_2^7, \\ -2V_1 = 2a_3^4 V_2 + 2a_3^5 V_3 + 2a_3^6 v + a_3^7. \end{array} \right.$$

Ces équations se simplifient beaucoup par les remarques suivantes.

D'abord U_2 et U_3 étant des fonctions linéaires de u et de U_1 , les coordonnées y et z de la surface se ramènent, par un transport des axes parallèlement au plan des yz , à la forme

$$\frac{m U_1 + \varphi(v)}{u+v} \quad (m = \text{const.}).$$

On peut donc, sans restreindre la généralité du résultat, supposer U_2 et U_3 de la forme $m U_1$, c'est-à-dire faire

$$a_1^4 = a_2^4 = a_1^5 = a_2^5 = 0,$$

et l'on a alors

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{U_1 + V_2}{u+v}, \\ y = \frac{a_3^4 U_1 + V_2}{u+v}, \\ z = \frac{a_3^5 U_1 + V_3}{u+v}, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(y - a_3^4 x)(V_3 - a_3^5 V_1) - (z - a_3^5 x)(V_2 - a_3^4 V_1) = 0.$$

Les courbes (v) sont donc dans des plans passant par la droite fixe

$$y = a_3^4 x, \quad z = a_3^5 x.$$

Cette droite étant prise pour axe des x , il vient

$$a_3^4 = a_3^5 = 0.$$

Les équations (8) de la surface et la dernière des équations de condition (7) se réduisent ainsi à

$$(9) \quad \begin{cases} x = \frac{U_1 + V_1}{u + v}, \\ y = \frac{V_2}{u + v}, \\ z = \frac{V_3}{u + v}, \end{cases}$$

$$(10) \quad 2V_1 = -2a_3^6 v - a_3^7.$$

En transportant enfin les axes parallèlement à Ox , ce qui ne change pas ce dernier axe déjà particularisé, on donne à la coordonnée x la forme $\frac{f(u)}{u+v}$; on peut, en conséquence, supposer la fonction V_1 nulle, c'est-à-dire faire $a_3^6 = a_3^7 = 0$.

En définitive, les équations (9) de la surface et les équations de condition (7) sont maintenant

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{U_1}{u + v}, \\ y = \frac{V_2}{u + v}, \\ z = \frac{V_3}{u + v}, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} U_4 = a_1^6 + a_2^6 u, \\ U_1^2 + 2U_1 u = a_1^7 + a_2^7 u, \\ V_2^2 + V_3^2 + 2V_3 v = -2a_1^6 v - a_1^7, \\ 2V_4 = -2a_2^6 v - a_2^7. \end{cases}$$

En posant

$$V_2 = V_6 \cos V_5,$$

$$V_3 = V_6 \sin V_5,$$

V_5 et V_6 étant deux nouvelles fonctions de v , on tire des équations (12)

$$U_1^2 = -2a_2^6 u^2 + u(a_2^7 - 2a_1^6) + a_1^7,$$

$$V_6^2 = 2a_2^6 v^2 + v(a_2^7 - 2a_1^6) - a_1^7,$$

ce qui peut s'écrire tout simplement, en passant à une surface homothétique, et appelant a et b deux constantes arbitraires,

$$U_1^2 = -u^2 + 2au + b,$$

$$V_6^2 = v^2 + 2av - b.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer u par $u + h$ et v par $v - h$, à prendre pour h l'une des racines de l'équation

$$h^2 - 2ah - b = 0$$

et à poser

$$2(a - h) = \alpha,$$

pour obtenir

$$U_1^2 = \alpha u - u^2,$$

$$V_6^2 = \alpha v + v^2,$$

puis les équations de Bonnet

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{u(\alpha - u)}}{u + v}, \\ y = \frac{\sqrt{v(\alpha + v)}}{u + v} \cos V_5, \\ z = \frac{\sqrt{v(\alpha + v)}}{u + v} \sin V_5, \end{array} \right.$$

qui comprennent, comme cas particulier, les équations des cyclides de Dupin.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 JUILLET 1894.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Fleury : *Sur l'emploi des séries divergentes.*

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*

M. Raffy : *Remarques sur le problème général de la déformation des surfaces.*

SÉANCE DU 18 JUILLET 1894.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Touche : *Sur le mouvement d'un corps attiré par une droite ou deux droites rectangulaires suivant la loi de l'inverse d'une puissance positive de la distance.*

M. Kœnigs : *Sur les ds^2 dits harmoniques.*

M. Raffy présente quelques observations à ce sujet.

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième degré.*

M. Blutel : *Sur quelques surfaces qui possèdent des asymptotiques cubiques.*

M. Demoulin : *Sur des couples de surfaces applicables, dont les points correspondants sont à une distance constante.*

M. P. PAINLEVÉ adresse la Communication suivante :

Note sur une identité entre certains déterminants.

Dans un travail sur les équations de la Mécanique et du Calcul des variations, j'ai rencontré l'identité suivante (voir le *Journal de Mathématiques*, p. 45; 1894) :

Soient T une fonction homogène quelconque d'ordre α ⁽¹⁾

⁽¹⁾ α est une quantité quelconque réelle ou imaginaire.

des $(p+1)$ variables $x, x_1, x_2, \dots, x_p$, et τ la fonction obtenue en faisant $x=1$ dans T. Soient, d'autre part, Δ le Hessian de T, et δ le déterminant $|a_{ij}|$ à p lignes et p colonnes dont le terme général a_{ij} est

$$x\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_i \partial x_j} - (x-1) \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j}.$$

Si l'on fait $x=1$ dans Δ , on a identiquement

$$(1) \quad (x-1) \delta \equiv x^{p-1} \Delta \tau^{p-1}.$$

On peut dire encore que le Hessian

$$\Delta_1 \equiv \frac{\delta}{x^{2p} \tau^{(2-\frac{1}{x})p}}$$

de la fonction

$$[T(1, x_1, x_2, \dots, x_n)]^{\frac{1}{x}}$$

coïncide avec l'expression

$$\frac{\Delta}{x^{p+1}(x-1)} \frac{1}{T^{p(1-\frac{1}{x})+1}}$$

(où l'on a fait $x=1$). En particulier, si $x=2$, Δ est le discriminant de la forme quadratique T et ne dépend plus des x ; on a alors

$$\delta \equiv 2^{p-1} \Delta \tau^{p-1}, \quad \Delta_1 \equiv \frac{\Delta}{2^{p+1}} \frac{1}{\tau^{1+\frac{p}{2}}}.$$

Voici une démonstration directe bien simple de cette identité. Si l'on observe que, dans δ , deux lignes partielles

$$\begin{aligned} & -(x-1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad -(x-1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \quad \dots, \quad -(x-1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}, \\ & -(x-1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \quad -(x-1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \quad \dots, \quad -(x-1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \frac{\partial \tau}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

sont identiques à un facteur près, on voit, en appelant d le Hessian de τ et d_i le déterminant obtenu en remplaçant dans d la $i^{\text{ème}}$ ligne par la ligne

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_p},$$

que le déterminant δ se met sous la forme

$$\delta \equiv x^{p-1} \tau^{p-1} \left[\alpha \tau d - (\alpha - 1) \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_1} d_1 + \frac{\partial \tau}{\partial x_2} d_2 + \dots + \frac{\partial \tau}{\partial x_p} d_p \right) \right],$$

ce qui peut s'écrire

$$\delta \equiv x^{p-1} \tau^{p-1} \begin{vmatrix} \alpha \tau & \frac{\partial \tau}{\partial x_1} & \frac{\partial \tau}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \tau}{\partial x_p} \\ (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_p} \\ (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha - 1) \frac{\partial \tau}{\partial x_p} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1 \partial x_p} & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2 \partial x_p} & \dots & \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_p^2} \end{vmatrix}.$$

Mais, d'autre part, transformons Δ ,

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x_p} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x_p} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_p} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_p^2} \end{vmatrix},$$

en tenant compte des identités d'Euler

$$x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + x_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_2} + \dots + x_p \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_p} \equiv (\alpha - 1) \frac{\partial T}{\partial x_j} \\ (x_j = x, x_1, \dots, x_p).$$

Si l'on multiplie la première ligne de Δ par x , la seconde par x_1 , la troisième par x_2 , etc., et si l'on fait la somme, on trouve pour Δ l'expression

$$\Delta = \frac{\alpha - 1}{x} \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T}{\partial x_p} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x_p} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_p^2} \end{vmatrix} \equiv \frac{(\alpha - 1)}{x} \Delta'.$$

Transformons maintenant Δ' d'après l'identité d'Euler

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + \dots + x_p \frac{\partial T}{\partial x_p} \equiv \alpha T,$$

jointe aux précédentes; en multipliant la première colonne par x , la seconde par x_1 , etc., et additionnant, on trouve

$$\Delta \equiv \frac{\alpha - 1}{x^2} \begin{vmatrix} \alpha T & \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial T}{\partial x_p} \\ (\alpha - 1) \frac{\partial T}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha - 1) \frac{\partial T}{\partial x_p} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_p} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 T}{\partial x_p^2} \end{vmatrix};$$

d'où, en faisant $x = 1$ dans Δ , l'identité annoncée

$$(\alpha - 1) \delta \equiv \alpha^{p-1} \Delta \tau^{p-1}.$$

On pourrait généraliser cette identité en introduisant les dérivées de T d'ordre supérieur au second.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. L. RAFFY.

1. Voici une proposition qui, malgré son étroite connexion avec une propriété bien connue des lignes asymptotiques, ne semble pas avoir été énoncée dans toute sa généralité :

Si les coordonnées de toutes les surfaces (Σ) qui admettent un même élément linéaire sont définies par des équations telles que

$$(1) \quad dx_i = A_i dx + B_i d\beta, \quad (i = 1, 2, 3),$$

où les A_i et les B_i sont des fonctions déterminées de deux variables α et β , de deux fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ d'un

seul argument chacune, ainsi que de leurs dérivées successives en nombre limité, les lignes $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$ sont les asymptotiques de toute surface (Σ) .

En effet, considérons en particulier une surface (Σ_0) qui répond à un choix déterminé des fonctions arbitraires

$$\varphi(\alpha) = \varphi_0(\alpha), \quad \psi(\beta) = \psi_0(\beta).$$

Si, dans les formules générales (1), nous donnons à β une valeur fixe β_0 , d'ailleurs quelconque, nous obtenons une courbe (C_0) de la surface (Σ_0) . Cette courbe est définie par les trois équations

$$dx_i = A_i[\alpha, \beta_0; \varphi_0(\alpha), \dots; \psi_0(\beta_0), \psi'_0(\beta_0), \dots, \psi_0^{(n)}(\beta_0)] d\alpha.$$

Cela posé, désignons par $\psi_1(\beta)$ l'une quelconque des fonctions de β qui satisfont aux $n + 1$ équations

$$\psi_1(\beta_0) = \psi_0(\beta_0), \quad \psi'_1(\beta_0) = \psi'_0(\beta_0), \quad \dots, \quad \psi_1^{(n)}(\beta_0) = \psi_0^{(n)}(\beta_0).$$

La surface (Σ_1) , obtenue en faisant dans les formules (1)

$$\varphi(\alpha) = \varphi_0(\alpha), \quad \psi(\beta) = \psi_1(\beta),$$

est applicable sur la surface (Σ_0) , puisqu'on suppose applicables les unes sur les autres toutes les surfaces définies par ces formules, quelles que soient les expressions attribuées aux fonctions φ et ψ . Mais, à raison des conditions imposées à la fonction $\psi_1(\beta)$, la surface (Σ_1) passe par la courbe (C_0) de la surface (Σ_0) , comme on le voit en donnant à β la valeur fixe β_0 . Dès lors, la surface (Σ_0) pouvant être déformée sans que la courbe (C_0) le soit, cette courbe est, en vertu d'un théorème connu ⁽¹⁾, une asymptotique de la surface (Σ_0) . On prouverait de même que les lignes $\alpha = \text{const.}$ sont aussi des asymptotiques ⁽²⁾.

⁽¹⁾ DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 280.

⁽²⁾ Le raisonnement qui précède a plus de généralité que la proposition énoncée. Il prouve notamment la suivante : *Si les formules*

$$dx_i = A_i d\alpha + B_i d\beta \quad (i = 1, 2, 3),$$

où les A_i et B_i sont des fonctions déterminées de deux variables α et β , d'une fonction arbitraire $\psi(\beta)$, ainsi que de ses dérivées successives en nombre limité, définissent des surfaces toutes applicables les unes sur les autres, les lignes $\beta = \text{const.}$ sont des asymptotiques pour chacune de ces surfaces.

2. Comme exemples de ce théorème, je citerai les diverses surfaces (à courbure totale différente de zéro) dont on connaît toutes les déformations, successivement découvertes par M. Weingarten ou déduites de ses travaux par M. Goursat ⁽¹⁾. Dans tous ces cas, en effet, les coordonnées des surfaces cherchées (Σ) sont déterminées par des formules pareilles à celles qui figurent dans l'énoncé ci-dessus; et M. Goursat, en étudiant la transformation imaginée par M. Weingarten, a implicitement établi que les variables α et β sont les paramètres des lignes asymptotiques des surfaces (Σ).

On voit que, quand un problème de déformation comporte une solution complète du type défini par l'énoncé de notre théorème, c'est à leurs asymptotiques qu'il faut rapporter les surfaces cherchées pour que les différentielles de leurs coordonnées prennent la forme dont il s'agit. Ceci suggère, pour traiter les questions d'applicabilité, deux procédés généraux, inverses l'un de l'autre, que nous emploierons successivement pour retrouver les beaux résultats qui viennent d'être rappelés.

3. *Premier procédé.* — Partons des formules par lesquelles M. Lelievre ⁽²⁾ a exprimé les différentielles des coordonnées d'une surface au moyen des paramètres α et β de ses asymptotiques :

$$(2) \quad \begin{cases} dx = (MN'_\alpha - NM'_\alpha) d\alpha - (MN'_\beta - NM'_\beta) d\beta, \\ dy = (NL'_\alpha - LN'_\alpha) d\alpha - (NL'_\beta - LN'_\beta) d\beta, \\ dz = (LM'_\alpha - ML'_\alpha) d\alpha - (LM'_\beta - ML'_\beta) d\beta. \end{cases}$$

Les fonctions L, M, N sont trois solutions quelconques (linéairement indépendantes) d'une même équation

$$(3) \quad \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = \rho(\alpha, \beta).$$

Si l'on représente par

$$(4) \quad ds^2 = E_1 d\alpha^2 + 2F_1 d\alpha d\beta + G_1 d\beta^2$$

⁽¹⁾ Sur un théorème de M. Weingarten et sur la théorie des surfaces applicables (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. V, 1892).

⁽²⁾ Bulletin des Sciences mathématiques, t. XII, p. 126.

l'élément linéaire des surfaces (2), on trouve aisément

$$(5) \quad \begin{cases} E_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'^2_x + M'^2_x + N'^2_x) - (LL'_x + MM'_x + NN'_x)^2, \\ -F_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'_x L'_\beta + M'_x M'_\beta + N'_x N'_\beta) \\ \quad - (LL'_x + MM'_x + NN'_x)(LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta), \\ G_1 = (L^2 + M^2 + N^2)(L'^2_\beta + M'^2_\beta + N'^2_\beta) - (LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta)^2. \end{cases}$$

Nous allons former trois fonctions L , M , N vérifiant une équation (3), telles en outre que les relations (2) rentrent dans le type qui nous occupe et définissent des surfaces toutes applicables les unes sur les autres. A cet effet, nous poserons

$$(6) \quad \begin{cases} 2L = i\sqrt{i} \left[(x^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial x} + (\beta^2 - 1) \frac{\partial v}{\partial \beta} \right], \\ 2M = \sqrt{i} \left[(x^2 + 1) \frac{\partial v}{\partial x} + (\beta^2 + 1) \frac{\partial v}{\partial \beta} \right], \\ 2N = i\sqrt{i} \left(2x \frac{\partial v}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial v}{\partial \beta} \right), \end{cases}$$

en désignant par v la solution la plus générale de l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} = \frac{\psi'(v)}{(x - \beta)^2},$$

où $\psi'(v)$ est la dérivée d'une fonction provisoirement indéterminée de v . Moyennant l'hypothèse faite sur v , on vérifie sans difficulté les relations

$$\frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \beta} = \frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial \beta} = \frac{1}{N} \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial \beta} = \frac{\psi'(v)}{(x - \beta)^2}.$$

Je dis maintenant que, la fonction ψ une fois choisie, d'une manière quelconque d'ailleurs, toutes les surfaces correspondantes ont même élément linéaire. En effet, les formules (6) donnent immédiatement

$$(8) \quad L^2 + M^2 + N^2 = 2i\sigma,$$

en introduisant la fonction auxiliaire

$$(9) \quad \sigma = \frac{(x - \beta)^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta}.$$

Dès lors, on a sans calcul

$$(10) \quad \begin{cases} LL'_\alpha + MM'_\alpha + NN'_\alpha = i \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha}, \\ LL'_\beta + MM'_\beta + NN'_\beta = i \frac{\partial \varpi}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Différentiant les formules (6) en ayant égard à l'équation (7), on trouve après réductions

$$(11) \quad \begin{cases} L'^2_\alpha + M'^2_\alpha + N'^2_\alpha = i \left[(\alpha - \beta)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + 2(\alpha - \beta) \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 \right], \\ L'^2_\beta + M'^2_\beta + N'^2_\beta = i \left[(\alpha - \beta)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + 2(\beta - \alpha) \frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} - \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2 \right], \\ L'_\alpha L'_\beta + M'_\alpha M'_\beta + N'_\alpha N'_\beta = i \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 \right] \\ \quad - i \left[(\alpha - \beta) \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right]. \end{cases}$$

Au moyen des relations (8), (9), (10) et (11) on peut calculer les seconds membres des identités (5). Il convient, pour faire disparaître des résultats les trois dérivées secondes de v , de les exprimer en fonction de $\psi'(v)$ et des deux dérivées premières de ϖ , ce que permettent les équations (7) et (9). On trouve ainsi

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right)^2 + 2\varpi \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2, \\ F_1 &= \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + 2\varpi \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta}, \\ G_1 &= \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right)^2 + 2\varpi \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} \right)^2. \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire $\varpi - \psi = u$ pour arriver à l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \psi(v)] dv^2,$$

dont la forme montre que toutes les surfaces correspondant à une même fonction $\psi(v)$ sont applicables les unes sur les autres.

Enfin, il est bien évident que les différentielles (2) rentreront dans le type (1) défini par notre théorème, si l'intégrale générale v de l'équation (7) admet la forme analytique des fonctions A_i et B_i . C'est ce qui aura lieu, d'après une théorie générale due

à M. Moutard, si l'on prend

$$\psi(v) = \frac{m(1-m)}{2} v^2, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

et aussi, en vertu d'une remarque faite par M. Weingarten, dans le cas où

$$\psi(v) = nv + pe^{\frac{2v}{n}},$$

quelles que soient les deux constantes arbitraires n et p . (On voit que, quand ψ est proportionnel à v^2 , les trois fonctions L , M et N sont des solutions de l'équation qui définit v).

4. *Second procédé.* — M. Darboux a montré ⁽¹⁾ que les coordonnées curvilignes u , v des points d'une surface d'élément linéaire

$$(4)' \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

sont définies comme fonctions des paramètres α et β des lignes asymptotiques par les deux équations suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2H^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(2H^2 \frac{\partial \log k}{\partial u} + G \frac{\partial E}{\partial u} - 2F \frac{\partial F}{\partial u} + F \frac{\partial E}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ & \quad + \left(H^2 \frac{\partial \log k}{\partial v} + G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ & \quad + \left(2G \frac{\partial F}{\partial v} - G \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial G}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \\ & 2H^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(2H^2 \frac{\partial \log k}{\partial v} + E \frac{\partial G}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial v} + F \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} \\ & \quad + \left(H^2 \frac{\partial \log k}{\partial u} + E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ & \quad + \left(2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$H^2 = EG - F^2, \quad k = \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}},$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux.

Quand on a trouvé une solution (u, v) de ce système, on a vir-

(1) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 290.

tuellement déterminé une surface (à la position et à une symétrie près) qui admet l'élément linéaire considéré. Mais, pour connaître les différentielles de ses coordonnées, il faut encore intégrer deux équations de Riccati.

Examinons l'élément linéaire pour lequel on a

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 2[u + \psi(v)]$$

et, par suite,

$$H^2 = G, \quad k = \frac{i}{G}.$$

Les équations générales (12) deviennent alors

$$(13) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} - \frac{\psi'(v)}{2(u + \psi)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{u + \psi} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,$$

$$(14) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} - \frac{\psi'(v)}{2(u + \psi)} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0.$$

Tel est le système que nous allons intégrer. Pour éliminer u , nous poserons

$$(15) \quad \varpi = u + \psi(v).$$

L'équation (14) s'écrit alors

$$(14)' \quad \varpi = \frac{\psi'}{2} \frac{v'_\alpha v'_\beta}{v''_{\alpha\beta}},$$

et la précédente devient

$$(13)' \quad \varpi \frac{\partial^2 \log \varpi}{\partial x \partial \beta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \beta} - v'_\alpha v'_\beta + \frac{\psi'}{2} \left(v'_\alpha \frac{\partial \log \varpi}{\partial \beta} + v'_\beta \frac{\partial \log \varpi}{\partial x} \right) = 0.$$

Si maintenant on élimine ϖ entre ces deux équations, on trouve, tous calculs faits,

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} \log \frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)} = -2 \frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)}.$$

De cette équation, intégrée par Liouville, on tire

$$(17) \quad \frac{v''_{\alpha\beta}}{\psi'(v)} = \frac{A'B'}{(A - B)^2},$$

en désignant par A et B deux fonctions arbitraires, l'une de α , l'autre de β . Ce résultat, rapproché des relations (14) et (15),

donne

$$(18) \quad \varpi = u + \psi(v) = \frac{1}{2} \frac{(A - B)^2}{A'B'} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta}.$$

Toutes les solutions du système (13) et (14) appartiennent donc au système (17) et (18). Pour établir la réciproque, remarquons que, si l'on pose

$$\mu = \frac{A'B'}{(A - B)^2},$$

d'où résultent, pour les équations (17) et (18), les formes suivantes

$$(17)' \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} = \mu \psi'(v),$$

$$(18)' \quad u = \frac{v'_\alpha v'_\beta}{2\mu} - \psi(v),$$

l'équation (14) est vérifiée d'elle-même. Quant à l'équation (13), il suffit d'y substituer les dérivées u'_α , u'_β , $u''_{\alpha\beta}$ tirées de l'équation (18)', en ayant égard à la relation (17)', pour voir que son premier membre contient en facteur l'expression

$$\frac{\partial^2 \log \mu}{\partial x \partial \beta} + 2\mu,$$

qui est nulle, d'après la définition de μ .

Ainsi, nous avons fait dépendre de l'équation (17), ou de l'équation (7) qui n'a pas moins de généralité, le problème qui consiste à rapporter l'élément linéaire proposé

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \psi(v)] dv^2$$

aux paramètres des lignes asymptotiques des surfaces qui l'admettent. C'est ce qui se fera par l'intermédiaire de la formule

$$u + \psi(v) = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2} v'_\alpha v'_\beta,$$

v étant l'intégrale générale de l'équation (7). On retrouve ainsi l'élément linéaire (4), défini par les relations (5), (6) et (7). Les surfaces correspondantes sont déterminées par les formules (2), ce qui nous dispense de former et d'intégrer les deux équations de Riccati dont il a été question plus haut.

§. Il n'est peut-être pas sans intérêt de rapprocher les deux procédés que nous venons d'appliquer et de présenter quelques remarques sur leur mode d'emploi.

Revenons aux formules (2). Désignons par a et b deux fonctions arbitraires, l'une de α , l'autre de β , par a_n et b_n leurs dérivées respectives d'ordre n et supposons que L , M , N soient des fonctions connues des arguments

$$\alpha, \beta; \quad a, b; \quad a_1, b_1; \quad a_2, b_2; \quad \dots; \quad a_n, b_n$$

et de ceux-là seulement. Par hypothèse, tous les éléments linéaires

$$(4) \quad ds^2 = E_1 d\alpha^2 + 2F_1 d\alpha d\beta + G_1 d\beta^2,$$

qui diffèrent les uns des autres par le choix des fonctions a et b , peuvent être ramenés à la même forme

$$(4)' \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

où E , F , G sont des fonctions *déterminées* des deux variables indépendantes u et v . Laissant de côté le cas des surfaces à courbure totale constante, nous allons exprimer u et v en α et β .

Égalant les courbures totales des deux éléments linéaires (4)' et (4), nous aurons une première équation finie

$$(19) \quad \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}} = k(u, v) = \frac{1}{L^2 + M^2 + N^2}.$$

On en obtiendra une seconde en égalant l'un des paramètres différentiels de $k(u, v)$ au paramètre correspondant de $(L^2 + M^2 + N^2)^{-1}$. Cette seconde équation

$$(20) \quad \chi(u, v) = \chi_1(\alpha, \beta),$$

jointe à la précédente, déterminera les fonctions u et v , dont le calcul n'exigera aucune intégration.

Cette conclusion ne tombe en défaut que quand *tous* les paramètres différentiels de k sont des fonctions de k , c'est-à-dire dans le cas des surfaces de révolution. Mais alors l'élément linéaire (4) pouvant s'écrire

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2,$$

la formule connue

$$k = \sqrt{\frac{U''}{U}}$$

donnera u en fonction de k , et, par suite, de α et β . Pour déterminer v , il suffit de recourir à l'identité

$$\frac{\sqrt{ds^2 - du^2}}{U} = dv.$$

Ayant exprimé le premier membre en α et β , on sera ramené à l'intégration d'une différentielle exacte. Si l'on a égard à la relation (19), on voit que u dépend des mêmes arguments (sans plus) que L , M , N , et que les dérivées partielles v'_α , v'_β dépendent en outre des dérivées a_{n+1} et b_{n+1} .

6. Dans le cas général, il semble que le second membre de l'équation (20) contienne, d'après sa loi de formation, des dérivées a_r , b_r d'ordre supérieur à n , et que, par suite, l'une au moins des fonctions u et v dépende de ces dérivées d'ordre r . Nous allons montrer qu'il n'en est rien : *les seuls arguments dont puissent dépendre u et v sont ceux qui concourent à former L , M et N .*

En effet, d'après nos hypothèses, les coefficients E_1 , F_1 , G_1 de l'élément linéaire (4) ne contiennent les dérivées de a et b que jusqu'à l'ordre $n+1$ inclusivement. Si donc r est supérieur à n , ils doivent être, en particulier, indépendants de a_{r+1} et de b_{r+1} . Supposons maintenant que l'on ait

$$u = u(a_r, b_r, \dots), \quad v = v(a_r, b_r, \dots).$$

Nous tirons de là

$$\begin{aligned} du &= \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} a_{r+1} + U_1 \right) d\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial b_r} b_{r+1} + U_2 \right) d\beta, \\ dv &= \left(\frac{\partial v}{\partial a_r} a_{r+1} + V_1 \right) d\alpha + \left(\frac{\partial v}{\partial b_r} b_{r+1} + V_2 \right) d\beta, \end{aligned}$$

les fonctions U_1 , U_2 , V_1 , V_2 ne dépendant ni de a_{r+1} , ni de b_{r+1} . Substituons ces différentielles dans l'élément linéaire (4)' et exprimons qu'il est indépendant de a_{r+1} et de b_{r+1} , en nous souvenant que E , F et G n'en dépendent pas. Le coefficient E_1 est un trinôme du second degré en a_{r+1} ; d'où les deux équations

$$\begin{cases} E \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} + G \left(\frac{\partial v}{\partial a_r} \right)^2 = 0, \\ EU_1 \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \left(V_1 \frac{\partial u}{\partial a_r} + U_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + GV_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0. \end{cases}$$

Le coefficient F_1 est bilinéaire en a_{r+1} et b_{r+1} ; d'où les trois équations

$$\left\{ \begin{array}{l} E \frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial u}{\partial b_r} + F \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} + \frac{\partial u}{\partial b_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0, \\ EU_2 \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \left(V_2 \frac{\partial u}{\partial a_r} + U_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + GV_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \\ EU_1 \frac{\partial u}{\partial b_r} + F \left(V_1 \frac{\partial u}{\partial b_r} + U_1 \frac{\partial v}{\partial b_r} \right) + GV_1 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0. \end{array} \right.$$

Le coefficient G_1 est un trinôme du second degré en b_{r+1} ; d'où les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} E \left(\frac{\partial u}{\partial b_r} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial b_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} + G \left(\frac{\partial v}{\partial b_r} \right)^2 = 0, \\ EU_2 \frac{\partial u}{\partial b_r} + F \left(V_2 \frac{\partial u}{\partial b_r} + U_2 \frac{\partial v}{\partial b_r} \right) + GV_2 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0. \end{array} \right.$$

Des sept équations ci-dessus, détachons la première de chaque groupe. Nous obtenons trois relations linéaires et homogènes en E, F, G , dont le déterminant est

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial b_r} - \frac{\partial u}{\partial b_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} \right)^3.$$

Ce déterminant doit être nul.

Soit d'abord $\frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial u}{\partial b_r} \neq 0$. On aura

$$\frac{\partial v}{\partial a_r} = \lambda \frac{\partial u}{\partial a_r}, \quad \frac{\partial v}{\partial b_r} = \lambda \frac{\partial u}{\partial b_r}.$$

Les trois équations considérées se réduisent à une, savoir

$$E + 2F\lambda + G\lambda^2 = 0.$$

Les quatre équations restantes se réduisent à deux

$$\begin{aligned} U_1(E + \lambda F) + V_1(F + \lambda G) &= 0, \\ U_2(E + \lambda F) + V_2(F + \lambda G) &= 0, \end{aligned}$$

qui, rapprochées de la précédente, ainsi écrite,

$$(E + \lambda F) + \lambda(F + \lambda G) = 0,$$

entraînent

$$V_1 = \lambda U_1, \quad V_2 = \lambda U_2,$$

et, par suite,

$$dv = \lambda du.$$

Ainsi v serait fonction de u , ce qui ne se peut.

Soit maintenant $\frac{\partial u}{\partial b_r} = 0$, avec $\frac{\partial u}{\partial a_r} \neq 0$, ce qui exige $\frac{\partial v}{\partial b_r} = 0$.

Les trois équations considérées se réduisent à une

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial a_r} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial a_r} \frac{\partial v}{\partial a_r} + G \left(\frac{\partial v}{\partial a_r} \right)^2 = 0.$$

Les quatre équations restantes se réduisent à deux

$$U_1 \left(E \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + V_1 \left(F \frac{\partial u}{\partial a_r} + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) = 0,$$

$$U_2 \left(E \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + V_2 \left(F \frac{\partial u}{\partial a_r} + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) = 0.$$

Rapprochons de chacune d'elles la précédente, ainsi écrite,

$$\frac{\partial u}{\partial a_r} \left(E \frac{\partial u}{\partial a_r} + F \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) + \frac{\partial v}{\partial a_r} \left(F \frac{\partial u}{\partial a_r} + G \frac{\partial v}{\partial a_r} \right) = 0;$$

nous trouvons immédiatement

$$U_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} - V_1 \frac{\partial u}{\partial a_r} = 0, \quad U_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} - V_2 \frac{\partial u}{\partial a_r} = 0.$$

On en conclut

$$U_1 = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial a_r}, \quad U_2 = \mu_2 \frac{\partial u}{\partial a_r},$$

$$V_1 = \mu_1 \frac{\partial v}{\partial a_r}, \quad V_2 = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial a_r}.$$

De là résulte

$$du = \frac{\partial u}{\partial a_r} [(a_{r+1} + \mu_1) dz + \mu_2 d\beta],$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial a_r} [(a_{r+1} + \mu_1) dz + \mu_2 d\beta].$$

Ainsi v serait fonction de u ou se réduirait à une constante, conclusions également inacceptables.

Supposons enfin $\frac{\partial u}{\partial a_r} = \frac{\partial u}{\partial b_r} = 0$, c'est-à-dire u indépendant de a_r et de b_r . Les trois équations considérées se réduisent à deux

$$G \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \quad G \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0.$$

On voit que, si G n'est pas nul, v devra, comme u , être indépendant de a_r et de b_r .

Si $G = 0$, les quatre équations restantes deviennent

$$U_1 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \quad U_1 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0, \quad U_2 \frac{\partial v}{\partial a_r} = 0, \quad U_2 \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0,$$

abstraction faite du facteur F , que l'on ne peut supposer nul sans réduire l'élément linéaire à un carré parfait. Or U_1 et U_2 ne peuvent pas être nuls tous les deux, car alors u serait constant. On a donc

$$\frac{\partial v}{\partial a_r} = \frac{\partial v}{\partial b_r} = 0,$$

ce qui montre que v est indépendant de a_r et de b_r .

7. D'après la proposition que nous venons d'établir, si les dérivées de l'ordre le plus élevé de a et de b qui figurent dans L , M et N sont celles de l'ordre n , les fonctions u et v ne contiendront pas de dérivée d'ordre plus élevé. Mais il peut arriver que l'une d'elles ne dépende ni de a_n , ni de b_n , ou que chacune d'elles ne dépende que de l'une de ces deux dérivées.

Pour étudier ces cas particuliers, revenons aux équations (12), que nous écrirons ainsi :

$$(12)' \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} + P \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \beta} + Q \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + R \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + P_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \beta} + Q_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + R_1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0, \end{cases}$$

ce qui définit suffisamment la signification des lettres P , Q , R , P_1 , Q_1 et R_1 . Je dis que si les dérivées de u ou de v manquent dans l'une de ces équations, l'élément linéaire (4)' convient à des surfaces réglées.

Supposons, par exemple, les coefficients P_1 et Q_1 nuls, ce qui entraîne les deux équations

$$(P_1) \quad 2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u} = 0,$$

$$(Q_1) \quad H^2 \frac{\partial \log k}{\partial u} + E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

La première peut s'écrire

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{F}{\sqrt{E}}.$$

On en déduit

$$\sqrt{E} = \frac{\partial t}{\partial u}, \quad \frac{F}{\sqrt{E}} = \frac{\partial t}{\partial v},$$

en introduisant une fonction auxiliaire t de u et de v . Alors l'élément linéaire proposé

$$(4)' \quad ds^2 = \left(\sqrt{E} du + \frac{F}{\sqrt{E}} dv \right)^2 + \frac{H^2}{E} dv^2$$

prend la forme

$$ds^2 = dt^2 + \frac{H^2}{E} dv^2.$$

Or, en éliminant la dérivée E_v entre les équations (P_1) et (Q_1) , on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{k H^2}{E} = 0, \quad \frac{H^2}{E} = \frac{V(v)}{k},$$

ce qui permet d'écrire

$$ds^2 = dt^2 + \frac{dv_1^2}{k},$$

résultat strictement équivalent à la forme canonique

$$ds^2 = dt^2 + (lt^2 + mt + n) dv_1^2$$

de l'élément linéaire des surfaces réglées. En effet, pour le type

$$ds^2 = dt^2 + C^2 dv_1^2,$$

le paramètre k est déterminé par la relation connue

$$k^2 = \frac{C''_{t^2}}{C}.$$

Dans l'exemple actuel, k^2 est égal à C^{-4} . On a donc

$$CC''_{t^2} = \frac{1}{C^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C^2}{\partial t^2} = CC''_{t^2} + C'^2_{t^2} = C'^2_{t^2} + \frac{1}{C^2}.$$

Différentions par rapport à t ; nous trouvons

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^3 C^2}{\partial t^3} = 2C'_t \left(C''_{t^2} - \frac{1}{C^3} \right) = 0.$$

Ainsi C^2 est bien un trinôme du second degré en t , ce qui démontre la proposition.

(A suivre.)

SUR LES FORMES BINAIRES DONT LES VARIABLES SONT DES INTÉGRALES
FONDAMENTALES
D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE;

Par M. PAUL VERNIER.

Dans la théorie des intégrales algébriques des équations linéaires du second ordre, on peut faire jouer un rôle considérable au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si une forme binaire dont les deux variables sont deux intégrales fondamentales de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ est égale à une racine d'une fonction rationnelle de x , elle renferme, à une même puissance, tous les facteurs linéaires, qui forment un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par l'un de ses facteurs linéaires.*

J'indiquerai ici une démonstration très simple de ce théorème.

1. Établissons d'abord un lemme.

Soit $f(y_1, y_2)$ une fonction homogène du $m^{\text{ième}}$ degré des deux variables y_1 et y_2 . Si l'on pose

$$(1) \quad f''_{y_1^2} f''_{y_2^2} - f''_{y_1 y_2}^2 \equiv H(f),$$

la fonction $H(f)$ est le hessien de la forme f ; c'est une fonction homogène de degré $2(m-2)$ par rapport aux mêmes variables. Lorsque y_1 et y_2 sont deux intégrales distinctes $y_1(x)$, $y_2(x)$ de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$, les deux formes binaires f et $H(f)$ sont deux fonctions de x , dont la seconde peut s'exprimer explicitement au moyen de la première. Posons, pour le démontrer, $f(y_1, y_2) = X$, en désignant par X une fonction explicite de la variable x .

Nous aurons

$$(2) \quad y_1 f'_{y_1} + y_2 f'_{y_2} \equiv mX,$$

$$(A) \quad y_1^2 f''_{y_1^2} + 2y_1 y_2 f''_{y_1 y_2} + y_2^2 f''_{y_2^2} \equiv m(m-1)X$$

et, d'autre part, en désignant les dérivées par des accents,

$$(3) \quad f'_{y_1} y'_1 + f'_{y_2} y'_2 = X'.$$

Si l'on prend les dérivées des deux membres des équations (2) et (3), en traitant la forme f comme fonction composée et en remplaçant y'_1, y'_2 par leurs valeurs $P y_1, P y_2$, nous obtenons les égalités suivantes :

$$(B) \quad y_1 y'_1 f''_{y_1^2} + (y_1 y'_2 + y_2 y'_1) f''_{y_1 y_2} + y_2 y'_2 f''_{y_2^2} \equiv (m-1)X',$$

$$(C) \quad y_1'^2 f''_{y_1^2} + 2 y'_1 y'_2 f''_{y_1 y_2} + y_2'^2 f''_{y_2^2} \equiv X'' - m P X.$$

Or, si je considère la forme quadratique binaire

$$(f''_{y_1^2}, f''_{y_1 y_2}, f''_{y_2^2}),$$

et que je désigne par (A, B, C) la transformée qu'on en déduit par la substitution $\begin{bmatrix} y'_1 & y'_1 \\ y'_2 & y'_2 \end{bmatrix}$ dont le déterminant est une constante b , on reconnaît immédiatement que les éléments A, B, C de la nouvelle forme sont identiquement les premiers membres des équations (A), (B), (C); on a donc

$$B^2 - AC = (m-1)^2 X'^2 - m(m-1)X(X'' - m P X),$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$B^2 - AC = b^2 (f''_{y_1 y_2}^2 - f''_{y_1^2} f''_{y_2^2}) = -b^2 \Pi(f).$$

De là, en posant, pour abrégé,

$$(4) \quad T = \frac{X'}{mX} = \frac{1}{m} \frac{d \log X}{dx},$$

on conclut

$$(5) \quad b^2 \Pi(f) \equiv m^2 (m-1) X^2 \left(\frac{dT}{dx} + T^2 - P \right).$$

2. Il résulte immédiatement de cette formule que si la forme $f(y_1, y_2)$ est égale à la racine d'une fonction rationnelle de x , son covariant $\Pi(f)$ jouit de la même propriété. En effet, si X est racine d'une fonction rationnelle, sa dérivée logarithmique $\frac{X'}{X}$ est une fonction rationnelle; le facteur $\frac{dT}{dx} + T^2 - P$ est donc aussi une fonction rationnelle et le produit de ce facteur par X^2 est, aussi bien que X , la racine d'une fonction rationnelle; il est même rationnel, lorsque X est la racine carrée d'une fonction rationnelle.

Or, lorsqu'une forme est égale à la racine d'une fonction rationnelle, les diverses substitutions linéaires qui correspondent aux divers contours que la variable peut décrire dans le plan en revenant au même point la laissent identique à elle-même, à un facteur constant près. Supposons en effet que, par suite d'un contour fermé, décrit par la variable, les deux intégrales fondamentales y_1, y_2 soient remplacées par les deux fonctions linéaires

$$\alpha y_1 + \beta y_2, \quad \gamma y_1 + \delta y_2$$

et désignons par $f_1(y_1, y_2)$ la fonction en laquelle se trouve changée par cette substitution la racine primitive $f(y_1, y_2)$. Si cette forme est égale à la racine X d'une fonction rationnelle, comme cette fonction X se change en elle-même, multipliée par une racine de l'unité, lorsque la variable revient au même point, après avoir décrit un contour dans le plan, il doit en être de même de $f(y_1, y_2)$, de sorte qu'on a, et cela *identiquement*,

$$f_1(y_1, y_2) = r f(y_1, y_2),$$

en désignant par r une racine de l'unité.

Ainsi, les substitutions linéaires qui correspondent aux divers circuits par lesquels la variable peut revenir au même point n'ont d'autre effet que de multiplier la forme $f(y_1, y_2)$ par une racine de l'unité. Il résulte de là que les facteurs linéaires de cette forme ne font que s'échanger entre eux, à un facteur constant près, lorsque la variable décrit un contour fermé; d'où il résulte que si cette forme renferme une puissance de degré λ d'un facteur linéaire, elle renferme aussi les puissances du même degré de tous les facteurs linéaires qui composent un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par le facteur linéaire considéré. Car, si l'on fait décrire à la variable le circuit par lequel ce facteur linéaire se change en un autre facteur de cette équation, la forme transformée renfermera la puissance du degré λ de ce facteur, et, comme elle ne diffère que par un facteur constant de la forme primitive, celle-ci renferme aussi comme facteur la même puissance de ce facteur.

La proposition annoncée est donc démontrée.

SUR LES MOUVEMENTS ET LES TRAJECTOIRES RÉELS DES SYSTÈMES;

Par M. PAUL PAINLEVÉ.

L'étude des trajectoires réelles d'un système soumis à des forces données rentre dans la théorie des courbes définies par les équations différentielles. On connaît les travaux considérables de M. Poincaré sur le sujet; les nouvelles méthodes d'approximation de M. Picard comportent également d'importantes applications à cette théorie. C'est à un point de vue assez différent que je me place pour étudier *le mouvement et les trajectoires réels d'un système matériel (S) à liaisons indépendantes du temps et soumis à des forces qui ne dépendent ni des vitesses ni du temps*. Le principal résultat que j'indiquerai ici n'est qu'une première application (dans le domaine *réel*) de la méthode que j'ai employée pour discuter les singularités essentielles d'une équation différentielle quelconque ⁽¹⁾.

Dans l'étude du mouvement de (S), étude qui revient à l'intégration d'un système d'équations de Lagrange, on peut se trouver en effet arrêté pour des raisons très différentes. Si, à l'instant t_1 , le système atteint une position déterminée (S_0) avec des vitesses déterminées, il n'y a aucune difficulté à poursuivre la détermination du mouvement, pourvu que la position (S_0) soit *régulière* : j'entends par là que, dans le voisinage de (S_0), les coefficients des équations de Lagrange sont des fonctions régulières des paramètres $q_1, \dots, q_k$, qui définissent la position de (S). Quand (S_0) est une position *singulière*, il faut avoir recours aux travaux de M. Poincaré et de M. Picard sur les intégrales des équations différentielles qui répondent à des conditions initiales singulières. Mais une difficulté d'un tout autre ordre provient de ce fait que, t tendant vers t_1 , la position de (S) ou ses vitesses peuvent ne pas tendre vers une limite; autrement dit, les fonctions $q_i(t)$ et $q'_i(t)$ peuvent devenir indéterminées pour $t = t_1$, et cela sans que rien le fasse prévoir sur les équations différentielles.

La proposition que j'ai en vue s'énonce ainsi : *Si, t tendant vers t_1 , (S) tend vers une position régulière, ses vitesses tendent*

(1) Voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (mars 1893).

respectivement vers une limite finie. De plus, si, t croissant indéfiniment, (S) tend vers une position régulière, cette position est nécessairement une position d'équilibre, et toutes les vitesses tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

D'après cela, si pour $t = t_1$ le mouvement cesse d'être régulier, c'est que (S) ou bien atteint une position singulière, ou bien ne tend vers aucune position limite quand t tend vers t_1 . Cette dernière singularité peut d'ailleurs se présenter : il arrive que les fonctions $q_i(t)$ deviennent indéterminées pour des valeurs réelles de t , variables avec les constantes. Toutefois, cela n'a jamais lieu quand certaines conditions sont remplies ; mais c'est là un point qui fera l'objet d'un travail ultérieur.

Le théorème que je viens de citer, joint à des considérations tout élémentaires, entraîne quelques conséquences au sujet des trajectoires réelles. Voici les plus importantes. Regardons les variables réelles $q_1, \dots, q_k$ comme les coordonnées d'un espace à k dimensions ; soit E_k un domaine de cet espace où les coefficients des équations de Lagrange sont holomorphes, et soit (C) ou $[q_i = \varphi_i(q_1), i = 2, \dots, k]$ un fragment de trajectoire contenu dans E_k . En chaque point M de (C), la force vive T de (S) a une valeur bien déterminée ; une trajectoire ne comporte donc que deux mouvements *distincts*, différant seulement par le sens, mouvements réels si T est positif, imaginaires si T est négatif. Mais les mouvements imaginaires deviennent réels (et réciproquement) quand on change t en it ou, ce qui revient au même, quand on change le sens de toutes les forces appliquées au système. En appelant mouvement *conjugué* du mouvement *vrai* le mouvement de (S) qui correspond aux nouvelles forces, on voit que les trajectoires réelles se divisent naturellement en *trajectoires vraies* et *trajectoires conjuguées*. Il existe un faisceau à k paramètres de trajectoires pour lesquelles T s'annule au moins en un point M' (qui n'est pas un point d'équilibre) ; en ces points, dits *points d'arrêt*, le système rétrograde sur la trajectoire, qui est alors formée de segments alternativement vrais ou conjugués, séparés par les points M' ; nous la nommons *trajectoire mixte*.

Il peut exister toutefois (mais il n'existe pas en général) des trajectoires exceptionnelles qui comportent une infinité de mouve-

ments; ces trajectoires sont nécessairement des *géodésiques* de T , et elles dépendent au plus de $(k-1)$ paramètres. Elles seront dites *trajectoires remarquables*. Quand elles dépendent précisément de $(k-1)$ paramètres, elles se confondent avec le faisceau des trajectoires mixtes dont le nombre de paramètres s'abaisse d'une unité.

Ces définitions adoptées, soit M un point de E_k ; *par ce point passent une infinité de trajectoires réelles* (C) *tangentes à une direction quelconque donnée et qui dépendent d'une constante arbitraire; ces trajectoires sont toutes des courbes analytiques régulières dans le voisinage de* M . Elles comprennent un faisceau à un paramètre de trajectoires *mixtes* présentant dans E_k un point d'arrêt, une trajectoire (C_1) (et une seule) pour laquelle M est un point d'arrêt. Cette trajectoire se réduit à un point si M correspond à une position d'équilibre de (S) . Enfin, quand par un point M passe une trajectoire *remarquable*, elle se confond avec (C_1) ; si toutes les trajectoires (C_1) sont remarquables, elles se confondent dans E_k avec les trajectoires mixtes.

Il ne passe pas par le point M *d'autres trajectoires, si le point* M *n'est pas une position d'équilibre*. Cette proposition peut paraître évidente au premier examen; en réalité, elle n'est exacte qu'en vertu du théorème énoncé tout à l'heure, et elle se trouve en défaut *pour les points d'équilibre*. Par un point d'équilibre M , il peut passer, en outre du faisceau régulier de trajectoires, des branches *SINGULIÈRES* de trajectoires (C) , qui présentent au point M des singularités de nature quelconque, par exemple n'ont pas de tangente; si *voisin qu'on prenne* M' *de* M , *l'arc* MM' *de* (C) *n'est parcouru en un temps fini ni dans le mouvement vrai, ni dans le mouvement conjugué*. En général, le système (S) tend sur (C) vers la position M quand t croît indéfiniment, dans l'un des deux mouvements vrai ou conjugué. Il arrive aussi que M est sur (C) un point limite d'une suite de points d'arrêt $M_1, M_2, \dots$; la branche MM' se décompose alors en une infinité de segments $M_1 M_2, M_2 M_3, \dots$ qui correspondent à autant de mouvements périodiques de (S) , alternativement vrais et conjugués. Enfin, il peut exister sur (C) une infinité de points d'équilibre (de l'une ou l'autre des espèces précédentes) formant

des suites dont le point d'équilibre considéré M soit un point limite.

Tout fragment MM' de trajectoire, intérieur à E_k , qui ne comprend pas de branche singulière, notamment tout fragment qui ne passe pas par un point d'équilibre, est parcouru tout entier en un temps fini dans le même sens, d'un mouvement soit vrai, soit conjugué; toutefois, dans le cas exceptionnel où (C) est une trajectoire mixte, MM' se décompose en un nombre *fini* de segments jouissant de cette propriété; si MM' appartient à une trajectoire remarquable, il est parcouru tout entier dans le même sens d'une infinité de manières, mais un point quelconque de MM' est point d'arrêt pour d'autres mouvements.

Quand les forces dérivent d'un potentiel, tout segment MM' (intérieur à E_k) d'une trajectoire prise au hasard, est parcouru entièrement en un temps fini, dans le mouvement vrai ou conjugué. Il n'y a d'exception que pour des faisceaux particuliers de trajectoires.

Tels sont les principaux résultats qui seront développés dans ce Mémoire. Je commencerai par établir quelques propositions bien simples concernant les équations différentielles des trajectoires.

NOMBRE DES CONSTANTES DONT DÉPENDENT LES TRAJECTOIRES.

Considérons un système (S) à liaisons indépendantes du temps, et soumis à des forces également indépendantes du temps, mais que nous ne supposons pas encore indépendantes des vitesses. Le mouvement de ce système est déterminé par les équations de Lagrange

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \\ (i = 1, 2, \dots, k), \end{array} \right.$$

où

$$2T \equiv \sum q'_i q'_j \Lambda_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_k) \equiv \frac{ds^2}{dt^2}, \quad (\Lambda_{ij} \equiv \Lambda_{ji}),$$

et où le discriminant Δ de la forme quadratique T n'est pas identiquement nul.

Soient $t_0, q_2^0, \dots, q_k^0, q_1'^0, q_2'^0, \dots, q_k'^0$ les valeurs de $t, q_2, \dots, q_k,$

$q'_1, q'_2, \dots, q'_k$, pour une valeur donnée de q_1 , soit $q_1 = 0$; les équations (1) définissent $q_1, q_2, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k$ en fonction de $t - t_0$ et des $(2k - 1)$ constantes arbitraires $q_2^0, q_3^0, \dots, q_k^0, q_1^0, \dots, q_k^0$. Exprimons $q_2, \dots, q_k$ en fonction de q_1 en éliminant t , et convenons de dire que les relations $q_2 = \varphi_2(q_1), \dots, q_k = \varphi_k(q_1)$ ainsi obtenues définissent *les trajectoires* du système. Il est clair que ces trajectoires dépendent au plus de $(2k - 1)$ constantes, à savoir $q_2^0, \dots, q_k^0, q_1^0, \dots, q_k^0$; d'autre part, elles dépendent au moins de $(2k - 2)$ constantes distinctes, puisque, pour q_1 donné, $q_2, \dots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \dots, \frac{dq_k}{dq_1}$ peuvent recevoir des valeurs arbitraires. Il est bien facile de voir qu'en général le nombre ν des constantes distinctes dont dépendent les trajectoires est égal à $2k - 1$, et de trouver à quelles conditions ce nombre se réduit à $2k - 2$.

Résolvons en effet les équations (1) par rapport aux q_i'' . Si α_i représente ce que devient le discriminant Δ quand on y remplace les éléments de la première colonne par $Q_1, \dots, Q_k$; enfin, si P_i représente une certaine forme quadratique par rapport aux q_i' , on peut écrire

$$(2) \quad q_i'' = P_i + \frac{\alpha_i}{\Delta} = P_i + \beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Nous avons d'autre part

$$q_i'' = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} q_1'^2 + \frac{dq_i}{dq_1} q_1''$$

et par suite

$$(3) \quad \frac{d^2 q_i}{dq_1^2} = \frac{\left(P_i - \frac{dq_i}{dq_1} P_1\right) + \left(\beta_i - \frac{dq_i}{dq_1} \beta_1\right)}{q_1'^2}, \quad (i = 2, 3, \dots, k).$$

Dans ce qui va suivre, nous représenterons par $q'_{(i)}, q''_{(i)}, \dots$ les dérivées $\frac{dq_i}{dq_1}, \frac{d^2 q_i}{dq_1^2}, \dots$, et par Π_i ce que devient P_i quand on y remplace q'_1 par 1, q'_2 par $q'_{(2)}, \dots, q'_k$ par $q'_{(k)}$. L'équation (3) devient ainsi

$$(4) \quad q''_{(i)} = \Pi_i - q'_{(i)} \Pi_1 + \frac{\beta_i - q'_{(i)} \beta_1}{q_1'^2} \quad (i = 2, 3, \dots, k),$$

les β étant des fonctions de $q_1, \dots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}$.

Deux cas sont alors à distinguer : si le second membre de toutes les équations (4) est indépendant de q'_1 , le système (4) forme un système de $(k-1)$ équations du second ordre portant sur les k variables $q_1, q_2, \dots, q_k$, et ces équations définissent $q_2, q_k, \dots, q_k$ en fonction de q_1 et des $(2k-2)$ constantes arbitraires $q_2^0, \dots, q_k^0, q'_{(2)}{}^0, \dots, q'_{(k)}{}^0$. Si au contraire q'_1 figure dans une au moins des équations (4), soit dans la première, on peut disposer de $q'_1{}^0$ pour que q_2^0 ait une valeur arbitraire (en même temps que $q_2^0, \dots, q_k^0, q'_{(2)}{}^0, \dots, q'_{(k)}{}^0$) et les fonctions $q_2, \dots, q_k$ de q_1 dépendent de $(2k-1)$ constantes arbitraires.

Pour que les seconds membres des équations (4) soient indépendants de q'_1 , et par suite que $\nu = 2k-2$, *il faut et il suffit évidemment que les $(k-1)$ expressions $q'_1 \beta_i - q'_i \beta_1$ soient homogènes et du troisième degré par rapport aux q'_i* . Si l'on désigne par a_{ij} le mineur de Δ relatif à l'élément A_{ij} , on a d'ailleurs

$$(5) \quad \beta_i = \frac{1}{\Delta} (a_{i1} Q_1 + a_{i2} Q_2 + \dots + a_{ik} Q_k),$$

et inversement

$$(6) \quad Q_i = A_{i1} \beta_1 + A_{i2} \beta_2 + \dots + A_{ik} \beta_k.$$

Le nombre ν sera en particulier égal à $(2k-2)$ si tous les coefficients Q_i sont homogènes et du second degré par rapport aux vitesses.

Quand les Q_i ne dépendent pas des vitesses, il en est de même des β_i ; pour que ν soit égal à $2k-2$, il faut donc et il suffit que les expressions $\beta_i q'_1 - \beta_1 q'_i$ soient identiquement nulles, ce qui entraîne

$$\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \dots \equiv \beta_k \equiv 0,$$

et par suite

$$Q_1 \equiv Q_2 \equiv \dots \equiv Q_k \equiv 0.$$

Les trajectoires sont alors les *géodésiques* du ds^2 .

Un cas remarquable est celui où, les forces dépendant des vitesses, les trajectoires du système coïncident avec les géodésiques du ds^2 . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les $(k-1)$ conditions $\beta_i q'_1 - \beta_1 q'_i \equiv 0$ soient remplies, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\beta_1}{q'_1} \equiv \frac{\beta_2}{q'_2} \equiv \dots \equiv \frac{\beta_k}{q'_k} \equiv \lambda,$$

ou encore, d'après (6),

$$(7) \quad Q_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \quad Q_2 = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \quad \dots, \quad Q_k = \lambda \frac{\partial T}{\partial q'_k},$$

λ désignant une fonction quelconque de q_i, q'_i .

Pour que les trajectoires de (1) coïncident avec les géodésiques de ds^2 , il faut donc et il suffit que $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ soient proportionnels à $\frac{\partial T}{\partial q'_1}, \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \dots, \frac{\partial T}{\partial q'_k}$.

Quand ces conditions sont remplies, les trajectoires (qui sont les géodésiques) une fois obtenues, il reste à intégrer une équation différentielle du premier ordre pour obtenir $\frac{dt}{dq_1}$; t est donné ensuite par une quadrature. Dans le cas où λ est homogène et du premier degré par rapport aux q'_i ,

$$\lambda = q'_1 f(q_1, \dots, q_k, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}),$$

le théorème des forces vives donne aussitôt

$$dT = 2fT dq_1,$$

d'où, en intégrant,

$$T = e^{2 \int f(q_1, \dots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \dots, \frac{dq_k}{dq_1}) dq_1};$$

t s'obtient ainsi à l'aide de deux quadratures.

Il est facile d'interpréter, dans des cas particuliers intéressants, ces conditions (7). Si, par exemple, le système (S) se réduit à un point libre M, ces conditions expriment que la force F qui s'exerce sur M a constamment même ligne d'action que la vitesse de M. Si le système (S) est formé de points matériels libres M_i de masse m_i , les conditions (7) expriment que la force (F_i) qui s'exerce sur chaque point M_i a pour ligne d'action la vitesse v_i de M_i , et que de plus les forces F_i sont entre elles comme les quantités de mouvement $m_i v_i$, $\frac{F_1}{m_1 v_1} = \frac{F_i}{m_i v_i}$. Enfin, dans le cas du mouvement d'un point sur une surface, les conditions (7) expriment que la projection (sur le plan tangent à la surface) de la force donnée est constamment dirigée selon la vitesse du point : c'est ce qui arrive

quand un point est mobile avec frottement sur une surface dans un milieu résistant.

Sans insister davantage sur ces applications faciles, je vais me placer désormais dans l'hypothèse où les forces Q_i ne dépendent pas des vitesses.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES TRAJECTOIRES. — MOUVEMENTS POSSIBLES SUR UNE TRAJECTOIRE. — TRAJECTOIRES REMARQUABLES.

Les trajectoires $q_i = q_i(q_1)$ définies par le système

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \dots, q_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

dépendent de $(2k - 1)$ constantes à moins que tous les Q_i ne soient nuls.

Quand tous les Q_i sont nuls, les trajectoires dépendent de $(2k - 2)$ paramètres et sont données, comme on sait, par le système

$$\frac{d}{dq_1} \frac{\partial f}{\partial q'_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 2, 3, \dots, k),$$

si l'on pose

$$f^2 = \sum \Lambda_{ij} q'_{(i)} q'_{(j)} = \frac{ds^2}{dq_1^2}, \quad \left(q'_{(1)} = 1, q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1} \right).$$

Le mouvement sur chaque *géodésique* est défini par l'égalité

$$T = h,$$

où h est une constante arbitraire, et qui donne t par la quadrature

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{h}} \int f dq_1.$$

On voit que sur la même trajectoire une infinité de mouvements *distincts* sont possibles; nous ne regardons pas comme *distincts* deux mouvements qui se déduisent l'un de l'autre en augmentant t d'une constante.

Je ne dirai rien de plus, pour l'instant, sur ce cas particulier. J'aborde immédiatement le cas général où les Q_i ne sont pas tous nuls.

Formons, dans ce cas, les équations différentielles des trajectoires; nous avons déjà obtenu le système

$$(a) \quad \frac{q''_{(i)} + q'_{(i)} \Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q'_{(i)} \beta_1} = \frac{q''_{(2)} + q'_{(2)} \Pi_1 - \Pi_2}{\beta_2 - q'_{(2)} \beta_1}, \quad (i = 3, 4, \dots, k),$$

la valeur commune de ces rapports étant $\left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2$.

D'autre part, posons

$$\psi_i = \beta_i - q'_{(i)} \beta_1, \quad \chi_i = q''_{(i)} + q'_{(i)} \Pi_1 - \Pi_i,$$

et différencions par rapport à q_1 l'égalité

$$q_1'^2 = \frac{\beta_2 - q'_{(2)} \beta_1}{q''_{(2)} + q'_{(2)} \Pi_1 - \Pi_2} = \frac{\psi_2}{\chi_2},$$

en remarquant que $\frac{d}{dq_1} q_1'^2 = 2 q_1'' = 2 \left(\Pi_1 \frac{\psi_2}{\chi_2} + \beta_1 \right)$; il vient

$$(b) \quad \frac{d}{dq_1} \frac{\psi_2}{\chi_2} = 2 \Pi_1 \frac{\psi_2}{\chi_2} + 2 \beta_1,$$

égalité de la forme

$$q_{(2)}''' = \frac{-3 q_{(2)}''^2 + q_{(2)}'' M_3 + M_5}{M_0 - q'_{(2)}},$$

où M_3 et M_5 désignent des polynômes du troisième et du cinquième degré en $q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}$, et M_0 une simple fonction des q_i .

J'ai indiqué dans un autre travail (voir le *Journal de Mathématiques*, 1894) quelques propriétés du système différentiel (a) et (b) qui définit les trajectoires. Je me bornerai à rappeler ici que les équations des géodésiques de T s'obtiennent en égalant à zéro les numérateurs χ_i des rapports (a); il suit de là que les géodésiques de T font partie des trajectoires; en effet, elles satisfont aux équations (a), et comme l'équation (b) peut s'écrire

$$\frac{d\chi_2}{dq_1} = \chi_2 N,$$

elles vérifient aussi cette équation. Les géodésiques de T forment donc, quels que soient les Q_i , un faisceau de trajectoires à $2(k-1)$ paramètres.

Détermination du temps. — Quand le système (a), (b) est in-

tégré, on connaît $q_2, \dots, q_k$ en fonction de q_1 et de $(2k-1)$ constantes arbitraires; le temps t est alors donné par une quelconque des égalités

$$(c) \quad dt = dq_1 \sqrt{\frac{\gamma_i}{\beta_i}} = dq_1 \sqrt{\frac{q_{(i)} + q'_{(i)} \Pi_1 - \Pi_i}{\beta_i - q'_{(i)} \beta_1}},$$

c'est-à-dire par une quadrature.

On voit qu'une trajectoire ne comporte que deux mouvements distincts (¹), qui se déduisent l'un de l'autre en changeant t en $-t$. En particulier, si cette trajectoire est une géodésique quelconque, on trouve $\frac{dt}{dq_1} \equiv 0$, $t = t_0$. Inversement, si l'on a $\frac{dt}{dq_1} \equiv 0$, tous les γ_i sont nuls et la trajectoire est une géodésique.

Quand on connaît une trajectoire particulière, le mouvement sur cette trajectoire est défini par la simple quadrature (c).

Trajectoires remarquables. — Il peut exister toutefois des trajectoires exceptionnelles, que nous appellerons trajectoires remarquables, pour lesquelles les conclusions précédentes sont en défaut; ce sont les trajectoires qui donnent à tous les rapports $\frac{\gamma_i}{\beta_i}$ la forme $\frac{0}{0}$, autrement dit qui satisfont à la fois à toutes les égalités

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_k = 0$$

et

$$(d) \quad \frac{dq_1}{\beta_1} = \frac{dq_2}{\beta_2} = \frac{dq_3}{\beta_3} = \dots = \frac{dq_k}{\beta_k}.$$

Les trajectoires remarquables seront donc les géodésiques (s'il en existe) qui vérifient les équations (d).

En général, ces conditions sont incompatibles; dans tous les cas, d'après (d), les trajectoires remarquables ne peuvent dépendre de plus de $(k-1)$ constantes.

Sur une trajectoire remarquable, une infinité de mouvements distincts sont possibles. En effet, il est loisible de remplacer les

(¹) Cette proposition subsiste quand les Q_i renferment les q'_i ; si le nombre ν des constantes qui figurent dans les trajectoires est égal à $2k-2$, chaque trajectoire comporte une infinité de mouvements; si $\nu = 2k-1$, chaque trajectoire (à part des trajectoires exceptionnelles) ne comporte que deux mouvements qui ne diffèrent que par le signe de t .

équations du mouvement par les équations (3)

$$(3) \quad 0 = q''_{(i)} + q'_{(i)} \Pi_1 - \Pi_i + \frac{\beta_1 q'_{(i)} - \beta_i}{q'^2_1} = \gamma_i - \frac{\psi_i}{q'^2_1}, \quad (i = 2, 3, \dots, k),$$

jointes à une des équations de Lagrange ou, si l'on veut, à l'égalité des forces vives

$$dT = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_k dq_k.$$

Par hypothèse, la trajectoire considérée, satisfaisant aux équations $\gamma_i = 0$, $\psi_i = 0$, satisfait aux équations (3); le mouvement sur cette trajectoire est donc défini par la seule égalité

$$T \equiv q'^2_1 f[q_1, \dots, q_k, 1, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)}] = \int [Q_1 + Q_2 q'_{(2)} + \dots + Q_k q'_{(k)}] dq_1,$$

ou encore

$$dt = dq_1 \sqrt{\frac{f(q_1)}{\varphi(q_1) + h}};$$

$\frac{dt}{dq_1}$ dépend donc d'une constante h (*).

Le mouvement du système (S) sur une trajectoire remarquable est celui d'un système à liaisons complètes; les points matériels d'un tel système ne parcourent qu'une trajectoire, mais peuvent la parcourir d'une infinité de manières.

Exemple. — Comme application, prenons l'exemple d'un point matériel libre M ou (x, y, z) soumis à une force F ou (X, Y, Z) . Quelles seront les trajectoires remarquables de M? Ce seront les droites D (s'il en existe) telles qu'en tout point (x, y, z) de D la force (F) ait D pour ligne d'action. A quelles conditions ces trajectoires dépendront-elles de $k - 1 = 2$ paramètres? Les droites D forment alors une congruence; par un point (x, y, z) quelconque passe une trajectoire D, et tout le long de D la force F est dirigée suivant cette droite. L'ensemble des lignes d'action de F, qui, en général, constitue un *complexe*, doit donc se réduire à une *congruence*; inversement, quand cette condition est remplie, toutes

(*) Il n'y aurait d'exception que si $f(q_1)$ était identiquement nul, c'est-à-dire si la géodésique satisfaisait à l'équation $ds^2 = 0$. Il est clair qu'elle ne pourrait correspondre alors à un déplacement *reel* des points du système matériel. C'est là un point sur lequel nous reviendrons tout à l'heure.

les droites de la congruence sont des trajectoires remarquables. Si notamment F dérive d'un potentiel U , la condition exprime que les surfaces de niveau sont *parallèles*. Le cas où F est une force centrale ou parallèle à une direction fixe sont des cas simples où la condition est remplie.

Remarque. — Il convient de faire au sujet de cet exemple une remarque d'une portée générale. Ne considérons que les valeurs réelles de x, y, z ; si X, Y, Z sont des fonctions *analytiques* de ces variables, holomorphes pour toutes les valeurs réelles de ces variables, il est clair qu'un segment de droite D ne peut être trajectoire remarquable sans que la droite tout entière jouisse de cette propriété; il est clair également que si les forces forment une congruence dans une certaine portion de l'espace, elles forment une congruence dans tout l'espace. Ceci est encore vrai quand les fonctions X, Y, Z présentent des points singuliers pourvu que ces points ne forment pas de surfaces séparant l'espace réel en parties distinctes.

Mais quand les fonctions X, Y, Z ne sont pas analytiques, ou quand, étant analytiques, elles présentent des surfaces coupures séparant l'espace en plusieurs parties, il n'en est plus ainsi en général. Il peut se faire qu'un segment seulement de droite soit trajectoire remarquable, et aussi que pour les points x, y, z d'un certain volume les forces F forment une congruence tout en formant un complexe pour les points d'un autre volume ⁽¹⁾.

C'est ce qui a lieu, par exemple, si le point M est soumis, à l'intérieur d'une sphère Σ de centre O et de rayon 1, à la force centrale $X = x, Y = y, Z = z$, et à l'extérieur de Σ à la force $X = x - (r - 1)^2, Y = y, Z = z, (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$: chaque diamètre OM de la sphère Σ est une trajectoire remarquable et peut être parcouru par le mobile d'une infinité de façons, mais quand le mobile sort de la sphère il quitte la droite D pour suivre une trajectoire tangente à la droite et d'autant plus voisine de D que sa vitesse de sortie est plus grande.

(1) Quand les fonctions X, Y, Z sont à plusieurs valeurs, il peut se faire que, pour le même volume, les forces forment une congruence si l'on choisit une certaine détermination des X, Y, Z , et un complexe si l'on choisit une autre détermination.

Pour échapper à toute objection, il faut donc énoncer ainsi la condition trouvée tout à l'heure :

Soit V une portion d'espace où les X, Y, Z ont une valeur bien déterminée; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il passe une trajectoire remarquable par un point arbitraire de V , c'est que les forces F (*relatives aux différents points de V*) forment une congruence; ou encore, s'il existe une fonction de force, que les surfaces de niveau contenues dans V soient parallèles.

La même observation s'applique à un système (S) quelconque, mais il sera plus commode de la développer après avoir fixé la terminologie que nous emploierons dans l'étude des trajectoires réelles que nous allons aborder maintenant.

TRAJECTOIRES RÉELLES ET MOUVEMENT RÉEL.

Choix des paramètres. Définitions. — Il est toujours loisible de choisir les paramètres indépendants $q_1, q_2, \dots, q_k$ qui définissent la position d'un système (S) de façon que pour toute position réelle à distance finie du système les $q_1, \dots, q_k$ aient une valeur unique, réelle et finie. Il suffit, en effet, x_j, y_j, z_j étant les coordonnées d'un point matériel M_j de (S) , de choisir, comme paramètres, k de ces coordonnées qui soient indépendantes.

Nous regarderons, dans ce qui va suivre, $q_1, q_2, \dots, q_k$ comme les k coordonnées rectangulaires d'un espace à k dimensions; quand (S) occupe toutes les positions réelles possibles, le point M ou $(q_1, q_2, \dots, q_k)$, qui lui correspond dans cet espace, varie dans un certain domaine réel E_k qui ne comprend pas nécessairement tout l'espace. C'est ce domaine E_k , où à tout point M correspond une position réelle du système, que nous prendrons exclusivement comme champ des variables $q_1, q_2, \dots, q_k$.

La position et la vitesse de chaque point M_j déterminant sans ambiguïté la force vive $2T$, chaque position réelle de (S) définit une valeur réelle et une seule des coefficients A_{ij} . Mais au point M de E_k peuvent correspondre plusieurs positions de (S) ; les coefficients A_{ij} forment alors un système multiforme de fonctions réelles définies dans E_k ; à chaque point M de E_k et à une détermination arbitrairement choisie des A_{ij} correspond une position réelle de (S) et une seule.

La même remarque s'applique aux coefficients

$$Q_i = \sum_j X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_i},$$

quand les forces données X_j, Y_j, Z_j sont définies sans ambiguïté pour chaque position réelle du système : c'est ce qui a toujours lieu dans les applications. S'il en était autrement, observons seulement qu'il faudrait fixer celle des déterminations X_j, Y_j, Z_j qu'on choisit au début du mouvement, afin que les conditions mécaniques initiales du problème fussent pleinement déterminées.

Nous supposons que les diverses valeurs des A_{ij}, Q_i définissent dans E_k autant de fonctions uniformes continues admettant des dérivées premières et secondes continues (1), sauf en certains points N de E_k que nous appelons *points singuliers* de E_k . En un point N une au moins des fonctions A_{ij}, Q_i ou de leurs dérivées est discontinue, ou bien deux de ces déterminations deviennent égales. Ces points N, dans le cas le plus défavorable, forment une surface à $(k-1)$ dimensions dans E_k , soit $\psi(q_1, q_2, \dots, q_k) = 0$; la surface qui limite E_k en fait partie, quand E_k n'embrasse pas tout l'espace.

J'ajoute que, les paramètres q_i étant convenablement choisis, le discriminant Δ de T ne s'annule pas dans E_k . Autrement les $\frac{\partial T}{\partial q_i}$, et par suite T, s'annuleraient en un point M de E_k et pour des valeurs réelles des q_i ; à M correspond une position réelle du système et aux q'_i des valeurs *réelles* des x'_j, y'_j, z'_j , qui ne sont pas toutes nulles si q_1 , par exemple, coïncide avec x_j . La somme $\sum m_j (x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2)$ serait donc nulle pour des valeurs réelles des x', y', z' différentes de zéro, ce qui est absurde (2).

En définitive, le mouvement de (S) sera défini par les équations

$$(2) \quad q''_i = P_i + \mathcal{P}_i \equiv \sum_{r,s} \lambda_{r,s}^i(q_1, \dots, q_k) q'_r q'_s + \mathcal{P}_i(q_1, \dots, q_k),$$

où les $\lambda_{r,s}^i$, et les $\mathcal{P}_i$ sont des fonctions réelles (à une ou plusieurs

(1) Il suffit même que les Q_i admettent des dérivées premières continues.

(2) Ceci est encore vrai évidemment si S est un système *continu* qui dépend de k paramètres.

déterminations) continues dans E_k ainsi que leurs dérivées premières, sauf en des points singuliers N .

Dans les applications, les diverses valeurs des Λ_{ij} , Q_i , par suite les $\lambda_{r,s}^i$, β_i sont des fonctions analytiques holomorphes de $q_1, q_2, \dots, q_k$, sauf en certains points N' de E_k que nous appellerons *points analytiquement singuliers* ⁽¹⁾. Il arrive que ces points N' forment des surfaces décomposant E_k en volumes distincts $E'_k, E''_k, \dots$; nous disons alors que les fonctions Λ_{ij} , Q_i présentent (dans E_k) des coupures *fermées*; en particulier, quand les Λ_{ij} , Q_i sont multiformes, il peut se faire que dans le même volume E'_k deux déterminations d'un de ces coefficients soient deux fonctions analytiques différentes.

Dans tous les cas, si l'on place le système S dans des conditions mécaniques initiales arbitrairement choisies, les valeurs correspondantes des $q_i - q'_i$ ainsi que les valeurs initiales des Λ_{ij} , L_i sont déterminées sans ambiguïté, et quand le point M ou $(q_1, \dots, q_k)$ varie (dans E_k) d'une manière continue, il n'y a aucune difficulté à suivre les variations des Λ_{ij} , L_i , tant que M ne passe pas par un point singulier N .

J'ajoute que plusieurs des restrictions précédentes ne sont nullement essentielles. Quand on assujettit seulement T à la condition que Δ ne soit pas identiquement nul, et quand on embrasse tout le champ réel E_k où les Λ_{ij} , Q_i restent réels, tout ce que nous allons dire subsiste, pourvu toutefois qu'on ajoute aux points singuliers N les points de E_k où Δ s'annule.

Précisons maintenant quelques définitions relatives aux courbes (C) [ou $q_i = \varphi_i(q_1)$, $i = 2, 3, \dots, k$] de l'espace E_k . Soit d'abord $k = 2$; si la courbe (C) , ou $q_2 = \varphi_2(q_1)$, admet dans le voisinage de M_0 une tangente continue, on peut rapporter q_2 et q_1 à l'arc σ compté à partir de M_0 positivement dans un sens déterminé. Quand σ croît par exemple à partir de 0, à chaque valeur de σ correspond un point M de (C) et un seul, tant que σ n'atteint pas une certaine limite σ_1 , qui peut être infinie. Pour $\sigma_1 = \infty$, deux hypothèses sont possibles; quand σ croît indéfiniment, ou bien M ne tend vers aucun point M_1 à distance finie, ou bien M tend vers une position limite M_1 . Quand σ_1 est fini, M tend sûrement vers

(1) Tous les points N sont des points N' , mais la réciproque n'est pas vraie.

un point M_1 ⁽¹⁾. Dans ces deux derniers cas, nous dirons que la courbe (C) passe par M_1 , mais il convient de remarquer que M_1 peut être un point singulier de nature quelconque, notamment un point *asymptote* de C.

Ces remarques s'étendent aussitôt à un espace E_k quelconque. Si les $(k-1)$ fonctions $q_i = \varphi_i(q_1)$ qui définissent (C) admettent dans le voisinage de q_1^0 des dérivées premières continues, posons (suivant la terminologie adoptée)

$$d\tau^2 = dq_1^2 + dq_2^2 + \dots + dq_k^2,$$

et appelons longueur de l'arc $M_1 M$ de (C) l'intégrale curviligne

$$\tau = \int_{M_0}^M d\tau, \text{ effectuée le long de (C).}$$

Quand on rapporte $q_1, \dots, q_k$ à τ (compté positivement à partir de M_0 dans un sens déterminé), à chaque valeur de τ correspond un point M et un seul, tant que τ n'atteint pas une certaine limite τ_1 (qui peut être infinie). Si M tend vers une position limite M_1 quand τ tend vers τ_1 (ce qui a toujours lieu quand τ_1 est fini) on dit que la courbe (C) passe par M_1 . Cette définition revient à la suivante : (C) passe par le point M_1 ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, si chacune de ses projections $q_i = \varphi_i(q_1)$ sur le plan des q_1, q_i passe par le point a_1, a_i .

La tangente à (C) au point M_0 sera la droite

$$\frac{q_1 - q_1^0}{\left(\frac{dq_1}{d\tau}\right)_0} = \frac{q_2 - q_2^0}{\left(\frac{dq_2}{d\tau}\right)_0} = \dots = \frac{q_k - q_k^0}{\left(\frac{dq_k}{d\tau}\right)_0},$$

dont les cosinus directeurs sont $\left(\frac{dq_i}{d\tau}\right)_0$. Si $q_1, q_2, \dots, q_k$ sont fonctions de t , la vitesse sera le segment qui a comme projections sur $Oq_1, \dots, Oq_k$ les valeurs $q'_1(t), \dots, q'_k(t)$, segment dirigé selon la tangente et dont la longueur est $\frac{d\tau}{dt}$. La courbure sera l'expression

$$\sqrt{\sum \left(\frac{d^2 q_i}{d\tau^2}\right)^2}.$$

(1) D'une façon précise, on entend par là que, ε étant donné à l'avance aussi petit qu'on veut, on peut déterminer α de façon que la distance MM_1 reste moindre que ε quand τ varie de $\tau_1 - \alpha$ à τ_1 (ou, dans le cas de τ_1 infini, quand τ croît à partir de α).

Un arc de courbe M_0M_1 de (C) sera dit *régulier*, si, en chaque point M de cet arc (les extrémités comprises), (C) admet une *tangente* continue. Analytiquement, cela signifie que les q_i étant rapportés à l'arc, soit $q_i = \psi_i(\tau)$, le point M parcourt M_0M_1 quand τ varie entre deux limites finies τ_0 et τ_1 , et que les fonctions $\psi_i(\tau)$ admettent des dérivées premières continues entre τ_0 et τ_1 (les valeurs extrêmes comprises).

Si (C) est une courbe analytique, les ψ_i sont des fonctions analytiques de τ . L'arc M_0M_1 de (C) sera dit *analytiquement régulier* si pour toute valeur de τ ($\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$) les fonctions ψ_i sont *holomorphes*.

Cette terminologie adoptée, revenons au mouvement réel d'un système (S) . Partons d'un point M_0 de E_k avec une valeur particulière des Λ_{ij} , Q_i , et considérons autour de M_0 un *volume* V_k de E_k à l'intérieur duquel les déterminations choisies pour les Λ_{ij} , Q_i soient *régulières*, j'entends restent uniformes et continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes. Il suffit pour cela que V_k ne renferme aucun des *points singuliers* N .

Les coefficients $\lambda_{r,s}^i$, β_i des équations (2) ont ainsi dans V_k une valeur unique.

Si M_0 ou $(q_1^0, \dots, q_k^0)$ est la position de M au temps t_0 , et v_0 ou $(q_1'^0, \dots, q_k'^0)$ sa vitesse initiale, les équations

$$(2) \quad q_i'' = P_i + \beta_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

définissent un mouvement et un seul, par suite une trajectoire et une seule, répondant à ces conditions initiales. On voit que par M_0 passent une infinité de trajectoires tangentes en ce point; la valeur absolue v_0 de la vitesse initiale permet de disposer arbitrairement de la courbure en M_1 de ces trajectoires. Par M_0 passe une géodésique et une seule tangente en M_0 à une droite donnée.

Qu'arrive-t-il quand la vitesse v_0 croît indéfiniment, sa direction restant invariable? Si l'on prend q_1 comme variable indépendante, les équations (2) deviennent, en posant $q_1' = \frac{1}{r_1}$,

$$(2)' \quad \begin{cases} \frac{dt}{dq_1} = r_1, & \frac{dr_1}{dq_1} = -r_1 \Pi_1 - r_1^3 \beta_1, \\ \frac{dq_i}{dq_1} = q_i', & \frac{dq_i'}{dq_1} = \Pi_i - q_i' \Pi_1 + (\beta_i - q_i' \beta_1) r_1^2, \quad (i = 2, 3, \dots, k). \end{cases}$$

Ces équations admettent un système d'intégrales, et un seul, tel qu'on ait, pour $q_1 = q_1^0$,

$$t = t_0, \quad r_1 = r_1^0, \quad q_i = q_i^0, \quad q'_i = q'^0_{(i)};$$

ces intégrales varient avec r_1^0 d'une manière continue, et pour $r_1^0 = 0$ sont de la forme

$$t = t_0, \quad r_1 = 0, \quad q_1 = \varphi_1(q_1), \quad q'_i = \varphi'_i(q_k),$$

la courbe $q_i = \varphi_i(q_1)$ étant la géodésique tangente à la direction (c_0) . Cette géodésique est donc la limite des trajectoires (C) quand c_0 croît indéfiniment.

Lorsqu'en M_0 tous les β_i s'annulent, et que de plus c_0 est aussi nul, les intégrales du mouvement sont simplement

$$q_1 \equiv q_1^0, \quad q_2 \equiv q_2^0, \quad \dots, \quad q_k \equiv q_k^0;$$

le point M reste en équilibre, la trajectoire se réduit au point M_0 . Nous appelons *points d'équilibre* les points P de E_k où tous les β_i sont nuls; les conditions $\beta_i = 0$ équivalent d'ailleurs aux conditions $Q_i = 0$, puisque Δ ne s'annule pas dans E_k . Les points P sont en général des points isolés; dans des cas particuliers, ils peuvent former des lignes, et même des surfaces à $(k-1)$ dimensions $f_i(q_1, \dots, q_k) = 0$ dans E_k .

Tout cela suppose seulement que M_0 ne soit pas un point singulier N des déterminations A_{ij} , Q_i considérées. Si M_0 coïncidait avec un tel point N, il faudrait avoir recours en général aux procédés de discussion de M. Poincaré. Observons toutefois qu'il y a lieu de distinguer ces points N en deux catégories : les points singuliers *parasites* qui tiennent au choix des paramètres q_i et qu'on fait disparaître en changeant de paramètres, en prenant par exemple comme variables k autres coordonnées parmi les x_j , y_j , z_j ; et les points singuliers *intrinsèques* qui subsistent quels que soient les paramètres choisis parmi les x_j , y_j , z_j . Par exemple, s'il s'agit d'un point mobile sur une surface $F(x, y, z) = 0$, et si l'on prend comme paramètres x et y , les points où le plan tangent est parallèle à Oz sont des points singuliers N, mais on élimine la singularité en prenant comme coordonnées x et z (ou y et z), pour étudier le mouvement dans le voisinage d'un tel point N, à

moins que N ne soit un point multiple de la surface; dans ce dernier cas seulement N est un point singulier intrinsèque. Il est clair que les points singuliers *intrinsèques* sont les seuls qui donnent lieu à des difficultés sérieuses; puisqu'un changement bien simple de paramètres fait disparaître les autres points N.

J'arrive maintenant aux propositions que j'ai en vue concernant les trajectoires et le mouvement réel.

Retour sur les trajectoires remarquables. — Je reviendrai d'abord un instant sur les trajectoires remarquables; sur une telle trajectoire (γ) , le mouvement est défini par l'égalité

$$dt = dq_1 \sqrt{\frac{f(q_1)}{\varphi(q_1) + h}},$$

où $f(q_1) \equiv T(q_1, \dots, q_k, 1, q'_{(2)}, \dots, q'_{(k)})$ est toujours positif, puisque T est positif en tout point M de E_k pour des valeurs réelles des q' qui ne sont pas toutes nulles. On peut, d'autre part, disposer de la constante h de façon que $\varphi(q_1) + h$ soit positif dans le voisinage d'un point arbitraire M de (γ) , en sorte qu'une infinité de mouvements réels sont possibles sur (γ) .

Par un point M du volume V_k de E_k considéré plus haut (où les A_{ij} , Q_i sont bien déterminés et réguliers), passe une courbe et une seule satisfaisant aux conditions

$$(d) \quad \frac{dq_1}{\beta_1} = \frac{dq_2}{\beta_2} = \dots = \frac{dq_k}{\beta_k},$$

pourvu que M ne soit pas un point d'équilibre.

Par un point arbitraire M de V_k passe donc au plus une trajectoire remarquable.

Pour qu'un point quelconque de V_k appartienne à une trajectoire remarquable, il faut et il suffit que toutes les courbes définies par (d) soient des géodésiques. On peut donner à ce théorème une forme un peu différente: soit (G) la géodésique tangente en M au segment $\beta_1, \dots, \beta_k$; l'ensemble des courbes (G) relatives aux différents points M de E_k dépend en général de k constantes distinctes. Pour qu'il passe une trajectoire remarquable par un point arbitraire de V_k , il faut et il suffit que l'ensemble (G) ne dépende que de $(k - 1)$ paramètres.

Quand les coefficients A_{ij} , Q_i sont (dans E_k) des fonctions ana-

lytiques sans coupure fermée, la condition ne peut être vérifiée pour une portion finie de V_k sans être vérifiée dans tout le domaine E_k . Mais quand les fonctions Δ_{ij} , Q_i ne sont pas analytiques ou présentent des coupures fermées, un volume V_k peut se décomposer en volumes de deux espèces V'_k , V''_k : par un point quelconque des V'_k il passe une trajectoire remarquable, au lieu qu'il n'en passe aucune par un point *arbitraire* de V''_k . Nous avons cité un exemple de ce fait (*voir* p. 147).

MOUVEMENTS RÉELS SUR UNE TRAJECTOIRE QUELCONQUE.

MOUVEMENTS VRAIS. MOUVEMENTS CONJUGUÉS.

Sur une trajectoire réelle quelconque, le mouvement est défini par une des égalités

$$(c) \quad \frac{dt}{dq_1} = \sqrt{\frac{q''_{(i)} + \Pi_1 q'_{(i)} - \Pi_i}{\beta_i - q'_{(i)} \beta_1}} = \sqrt{\frac{\gamma_i}{\psi_i}}.$$

Si le long du segment $M_0 M_1$ d'une trajectoire réelle (C), la valeur commune des rapports $\frac{\gamma_i}{\psi_i}$ est positive, l'arc $M_0 M_1$ est parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement réel, et nous dirons que c'est une trajectoire *vraie*. Si la même expression $\frac{\gamma_i}{\psi_i}$ est négative, le mouvement est imaginaire; il devient réel quand on change t en it dans les équations (1), ce qui ne modifie pas les trajectoires; les nouvelles équations (1) sont alors celles du système (S) sous l'action des mêmes forces (F) dont on a seulement changé le sens. Nous donnerons à ce second mouvement le nom de mouvement *conjugué* du mouvement *vrai*, et nous dirons que l'arc $M_0 M_1$ est une trajectoire conjugée. On voit que les trajectoires réelles (C) se divisent ainsi en deux classes : les trajectoires *vraies* (C'), et les trajectoires *conjuguées* (C'') qui sont les trajectoires vraies de (S) quand on change le *sens* des forces.

Pour pousser plus loin l'étude de ces trajectoires, nous établirons une importante propriété du mouvement réel.

DÉMONSTRATION D'UNE PROPRIÉTÉ DU MOUVEMENT RÉEL.

Plaçons le système dans une position initiale *régulière* M_0 avec

des vitesses données, et étudions le mouvement quand t croît ⁽¹⁾ à partir de t_0 . Nous dirons que le mouvement reste *régulier* entre t_0 et t_1 si, quand t varie de t_0 à t_1 , le système occupe à chaque instant une position déterminée à distance finie avec des vitesses déterminées sans passer jamais par une position singulière N.

D'après le théorème fondamental sur les équations différentielles, les intégrales $q_i(t)$ du mouvement qui correspondent aux conditions initiales $q_i^p, q_i'^0$, sont continues, et admettent des dérivées premières continues tant que $|t - t_0|$ reste inférieur à une certaine limite; le mouvement reste donc à coup sûr régulier dans un intervalle de temps fini. Admettons qu'il reste régulier tant que t n'a pas atteint ou dépassé la valeur t' . Quand t tend vers t' , une au moins des trois circonstances suivantes doit se présenter : ou bien (S) ne tend vers aucune position limite à distance finie, ou bien (S) tend vers une position singulière; ou bien enfin (S) tend vers une position régulière, mais les vitesses q'_i ne tendent pas vers des limites finies. Autrement, en effet, (S) atteindrait à l'instant t' une position régulière avec des vitesses déterminées, et, d'après le théorème invoqué, le mouvement se poursuivrait régulièrement au delà de t' . — La proposition que nous voulons démontrer, c'est que la troisième circonstance ne saurait se réaliser. Autrement dit, quand t tendant vers t' , le système (S) tend vers une position régulière, les vitesses q'_i de (S) tendent vers des limites finies et le mouvement reste régulier à l'instant t' et au delà.

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le théorème fondamental de la théorie des équations tel que l'énonce M. Picard ⁽²⁾.

Soit M ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ un point de E_k dans le voisinage duquel les déterminations choisies pour les A_{ij}, Q_i sont *régulières* (au sens que nous avons défini); les seconds membres des équations

$$(2) \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i, \quad \frac{dq'_i}{dt} = P_i + Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

⁽¹⁾ Il suffit de faire croître t , car les équations (1) ne changent pas quand on change t en $-t$.

⁽²⁾ Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. XI, p. 308.

seront continus ainsi que leurs dérivées premières et moindres en module qu'une certaine limite M tant que les q_i, q'_i satisferont aux inégalités

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad |q'_i| \leq L, \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

δ est un certain nombre positif, L un nombre positif choisi arbitrairement, et que nous prenons seulement supérieur à δ .

D'après cela, soit $q_i^0, q_i'^0$ un système de valeurs satisfaisant aux conditions

$$|q_i^0 - a_i| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |q_i'^0| \leq \frac{L}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Pour toutes les valeurs q_i, q'_i telles qu'on ait

$$|q_i - q_i^0| \leq \frac{\delta}{2}, \quad |q'_i - q_i'^0| \leq \frac{\delta}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

les seconds membres de (2) restent en module moindres que M . D'après le théorème invoqué, le système d'intégrales $q_i(t), q'_i(t)$ qui, pour $t = t_0$ prennent les valeurs $q_i^0, q_i'^0$, est un système de fonctions de t bien déterminées et continues au moins dans l'intervalle $t_0 - \frac{\delta}{2M}$ à $t_0 + \frac{\delta}{2M}$.

Voyons, d'autre part, ce qui se passe pour des vitesses initiales très grandes (en valeur absolue). Prenons comme variable indépendante un des paramètres q choisi de façon que sa dérivée $\left(\frac{dq}{dt}\right)_0$ ne soit en module inférieure à aucune des autres dérivées $q_i'^0$; soit q_1 ce paramètre. Le système (2) devient le système

$$(2)' \quad \begin{cases} \frac{dt}{dq_1} = r_1, & \frac{dr_1}{dq_1} = -r_1 \Pi_1 - r_1^3 \beta_1, \\ \frac{dq_i}{dq_1} = q'_i, & \frac{dq'_i}{dq_1} = \Pi_i - q'_i \Pi_1 + (\beta_i - q'_i \beta_1) r_1^2. \end{cases}$$

Soit M_1 le module maximum des seconds membres de ces équations quand on a à la fois

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad r_1 \leq L_1, \quad |q'_i| \leq 1 + \frac{\delta}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

(L_1 étant toujours une quantité quelconque supérieure à δ). Soient, d'autre part, des valeurs $q_i^0, r_1^0, q_i'^0$ satisfaisant aux con-

ditions

$$|q_i^0 - a_i| \leq \frac{\delta}{2}, \quad r_1^0 \leq \frac{L_1}{2}, \quad |q'_{(i)}| \leq 1;$$

il existe un système d'intégrales et un seul $t(q_1)$, $r_1(q_1)$, $q_i(q_1)$, $q'_{(i)}(q_1)$ qui prennent pour $q_1 = q_1^0$ les valeurs t_0 , r_1^0 , q_i^0 , $q'_{(i)}^0$, et ces intégrales sont continues au moins dans l'intervalle de $q_1^0 - \varepsilon_1$ à $q_1^0 + \varepsilon_1$, en appelant ε_1 la quantité $\frac{\delta}{2M_1}$.

En particulier, si $r_1^0 = 0$, ce système est de la forme

$$t \equiv t_0, \quad r_1 \equiv 0, \quad q_i \equiv \varphi_i(q_1), \quad q'_{(i)} \equiv \varphi'_i(q_1).$$

Ceci nous montre que, dans l'intervalle de $q_1^0 - \varepsilon_1$ à $q_1^0 + \varepsilon_1$, r_1 ne s'annule jamais à moins d'être identiquement nul; t varie donc constamment dans le même sens quand q_1 croît de $q_1^0 - \varepsilon$ à $q_1^0 + \varepsilon$, et passe de la valeur $t_0 - \tau_1$ à la valeur $t_0 + \tau_1'$ (ou de la valeur $t_0 + \tau_1'$ à la valeur $t_0 - \tau_1$). Il suit de là que $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_k(t)$ sont des fonctions de t continues ainsi que leurs dérivées premières dans l'intervalle de $t_0 - \tau_1$ à $t_0 + \tau_1'$, et que q_1 passe d'une des valeurs $q_1^0 \pm \varepsilon$ à l'autre quand t varie dans cet intervalle.

Le même raisonnement peut se répéter si la variable indépendante est un autre paramètre q_j . Aux équations (2') correspondent des équations analogues; soit M_j le module maximum des seconds membres de ces équations quand on a à la fois

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad \left| \frac{dt}{dq_j} \right| \leq L_1, \quad \left| \frac{dq_i}{dq_j} \right| \leq 1 + \frac{\delta}{2};$$

à la quantité $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2M_1}$ correspond la quantité $\varepsilon_j = \frac{\delta}{2M_j}$; j'appellerai ε la plus petite des quantités ε_j .

Nous sommes dès lors en état de démontrer la proposition que nous avons énoncée. Admettons, en effet, que, t tendant vers t' , (S) tende vers une position non singulière $a_1, a_2, \dots, a_k$; de deux choses l'une: ou bien les q'_i tendront vers zéro (auquel cas le théorème est démontré), ou bien l'un au moins des q'_i , pour certaines valeurs de t aussi voisines qu'on veut de t' , est supérieur en module à une certaine limite fixe λ . Considérons alors le

nombre ε introduit plus haut et qui correspond aux conditions

$$|q_i - a_i| \leq \delta, \quad \left| \frac{dt}{dq_j} \right| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \left| \frac{dq_i}{dq_j} \right| \leq 1 + \frac{\delta}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

($\frac{1}{\lambda}$ remplace L_1). Nous pouvons, par hypothèse, trouver un instant t_1 assez voisin de t pour que, t variant de t_1 à t' , chaque variable q_i reste comprise entre $q_i - \alpha$ et $q_i + \alpha$; α désigne un nombre quelconque qu'on a choisi inférieur à $\frac{\delta}{2}$ et à $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit maintenant t_0 une valeur de t comprise entre t' et t_1 et pour laquelle le plus grand des modules $|q'_i|$, soit $|q'_1|$, dépasse λ . On a, pour $t = t_0$,

$$|q_1^0 - a_1| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \left| \frac{dt}{dq_1} \right|_0 < \frac{1}{\lambda}, \quad \left| \frac{dq_i}{dq_1} \right|_0 \leq 1, \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

quand q_1 varie de $q_1^0 - \varepsilon$ à $q_1^0 + \varepsilon$, t varie de $t_0 - \tau_1$ à $t_0 + \tau_1'$ (ou de $t_0 + \tau_1'$ à $t_0 - \tau_1$); je dis que t' est compris entre t_0 et $t_0 + \tau_1'$. Autrement, t variant de t_0 à $t_0 + \tau_1'$, par suite entre t_1 et t' , q_1 varierait de q_1^0 à $q_1^0 \pm \varepsilon$; mais, entre t' et t , on a

$$|q_1 - a_1| \leq \alpha < \frac{\varepsilon}{2};$$

deux valeurs de q_1 dans cet intervalle ne peuvent donc différer de ε . L'instant t' est nécessairement compris entre t_0 et $t_0 + \tau_1'$, et comme, dans cet intervalle, les fonctions $q_i(t)$, $q'_i(t)$ sont continues, le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t' .

C. Q. F. D.

Dans ce qui précède, nous avons supposé t' fini. Admettons maintenant que, t croissant indéfiniment à partir de t_0 , le mouvement reste régulier; trois hypothèses sont possibles : ou bien, t croissant indéfiniment, (S) ne tend vers aucune position limite à distance finie (¹); ou bien (S) tend vers une position singulière; ou enfin (S) tend vers une position M ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ non singulière. Je vais montrer que, *dans ce dernier cas, cette position M*

(¹) (S) peut s'éloigner indéfiniment, ou sa position peut être indéterminée quand t tend vers ∞ .

est nécessairement une position d'équilibre P et de plus que les q'_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

Tout d'abord les vitesses tendent vers zéro; admettons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi et répétons le raisonnement fait plus haut en gardant la même notation; par hypothèse, pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite t_1 , on a

$$|q_i - a_i| \leq \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k);$$

mais, d'autre part, il existe des valeurs t_0 de t plus grandes que t_1 et telles que l'un au moins des paramètres, q_1 par exemple, varie de ε quand t passe de t_0 à $t_0 + \tau'_1$. Il y a donc contradiction; les q'_i tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

D'autre part, la position limite $a_1, a_2, \dots, a_k$ est une position d'équilibre du système (S). Changeons, en effet, t en $\frac{1}{\eta}$; les équations (2) deviennent

$$\frac{dq_i}{d\eta} = -\frac{q'_i}{\eta^2}, \quad \frac{dq'_i}{d\eta} = -\frac{\mathcal{P}_i + \Pi_i}{\eta^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Par hypothèse, quand η tend vers zéro, les $q_1, \dots, q_k$ tendent vers $a_1, a_2, \dots, a_k$ et les q'_i vers zéro; il suit de là que $\mathcal{P}_i(a_1, \dots, a_k)$ est nul; car soit $\mathcal{P}_1(a_1, \dots, a_k) = \mathcal{P}_1^0 \neq 0$, on aurait

$$\frac{dq'_1}{d\eta} = -\frac{\mathcal{P}_1^0 + \delta'_1}{\eta^2},$$

δ'_1 tendant vers zéro avec η , et q'_1 croîtrait indéfiniment quand η tendrait vers zéro. Il faut donc que $\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0, \dots, \mathcal{P}_k^0$ soient nuls.

Inversement ⁽¹⁾ d'ailleurs, si le système (S) tend vers une position régulière d'équilibre P ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, avec une force vive qui tend vers zéro, quand t tend vers une certaine limite t' , cette limite est forcément l'infini; car si t' était fini, le mouvement répondrait pour $t = t'$ aux conditions initiales $q_i = a_i, q'_i = 0$; or (P étant une position d'équilibre) le système unique d'intégrales définies par ces conditions initiales est le système $q_i = a_i$.

(1) Cette réciproque, comme la proposition même, n'est plus exacte si la position P est intrinsèquement singulière.

Nous pouvons en définitive énoncer ce théorème :

THÉORÈME. — *Si, quand t tend vers t' , le système (S) tend vers une position non singulière, les vitesses tendent vers une limite finie ⁽¹⁾ et le mouvement se poursuit régulièrement au delà de t' .*

Si, quand t croît indéfiniment, le système (S) tend vers une position limite non singulière, cette position est nécessairement une position d'équilibre et les vitesses de (S) tendent vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

Inversement, si (S) tend vers une position (régulière) d'équilibre avec une force vive qui tend vers zéro, ce ne peut être que pour t croissant (ou décroissant) indéfiniment.

APPLICATION DU THÉORÈME PRÉCÉDENT A L'ÉTUDE DES TRAJECTOIRES.

Tangente à une trajectoire. Courbure. — Supposons qu'à l'instant t_1 le point M de E_k qui définit la position de (S) arrive en un point M_1 ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ non singulier; sa vitesse est nécessairement déterminée et finie, mais deux cas sont à distinguer, suivant qu'elle est ou non différente de zéro. Plaçons-nous d'abord dans le premier cas qui est le cas général.

Un au moins des q'_i , soit q'_1 , est alors différent de zéro à l'instant t_1 . Le mouvement est défini par les égalités

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 + b_1(t - t_1) + \dots & (b_1 \neq 0), \\ q_2 &= a_2 + b_2(t - t_1) + \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La trajectoire (C) de M se poursuit au delà de M_1 , et admet

(1) Lorsque les fonctions A_{ij} , Q_i sont analytiques, on démontre de la même manière cette proposition plus générale : si, quand la variable imaginaire t tend vers t' suivant une certaine loi continue, les q_i tendent vers des valeurs $a_1, \dots, a_k$ qui ne sont pas des valeurs *singulières*, les q'_i tendent nécessairement vers des limites finies. Ce n'est là qu'un cas particulier d'un important théorème qui concerne toutes les équations

$$q''_i = F_i(t, q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k) \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

où F_i est algébrique par rapport aux q'_i : ce théorème sera développé dans un Mémoire consacré aux équations différentielles.

en M_1 et dans le voisinage *une tangente continue* dont les cosinus directeurs sont proportionnels à $1, \frac{q'_2}{q'_1}, \dots, \frac{q'_k}{q'_1}$.

De plus, les égalités

$$q''_{(i)} = \Pi_i - \frac{q'_i}{q'_1} \Pi_1 + \frac{\beta_i - \frac{q'_i}{q'_1} \beta_1}{q'^2_1}, \quad (i = 2, 3, \dots, k)$$

montrent que la trajectoire admet en M_1 et dans le voisinage *une courbure continue* ⁽¹⁾. Cette courbure varie pour les diverses trajectoires tangentes en M_1 à la même droite avec q'_1 , à moins toutefois que la tangente n'ait précisément pour direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$; les trajectoires (en particulier la géodésique) tangentes à cette droite ont même courbure, du moins toutes celles qui correspondent à une vitesse en M_1 différente de zéro.

Inversement, donnons-nous en M_1 *la tangente et la courbure* d'une trajectoire (C). Les rapports $\frac{q'_i}{q'_1} = q'_{(i)}$ sont déterminés; d'autre part, R désignant le rayon de courbure, on a

$$\frac{1}{R^2} = \sum \frac{\left[q'_{(i)} \Pi_j - q'_{(j)} \Pi_i + \frac{\beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}}{q'^2_1} \right]^2}{[\sum q'^2_{(i)}]^3},$$

d'où deux valeurs pour q'^2_1 et, par suite, deux trajectoires (C_1) et (C_2) , pourvu seulement que toutes les quantités $\beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}$ ne soient pas nulles, c'est-à-dire que la tangente n'ait pas comme direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. Mais à quelles conditions ces trajectoires (C_1) et (C_2) seront-elles réelles? Si l'on pose

$$A_r = \beta_j q'_{(i)} - \beta_i q'_{(j)}, \quad B_r = \Pi_j q'_{(i)} - \Pi_i q'_{(j)} \quad \text{et} \quad \rho^2 = \frac{[\sum q'^2_{(i)}]^3}{R^2},$$

il faut que les deux valeurs de q'^2_1 soient réelles, et, par suite, qu'on ait

$$(\sum A_r B_r)^2 + \sum A_r^2 (\rho^2 - \sum B_r^2) \geq 0,$$

ou bien

$$\rho^2 \geq \frac{\sum (A_r B_s - A_s B_r)^2}{\sum A_r^2}.$$

Quand cette condition est remplie, les trajectoires (C_1) et (C_2)

⁽¹⁾ Si M_1 est un point *analytiquement* régulier des Λ_i, Q_i , la trajectoire est une courbe analytique régulière dans le voisinage de M_1 .

sont réelles. Si, de plus, φ^2 est supérieur à ΣB_r^2 , l'une de ces trajectoires est vraie, l'autre conjuguée. Pour $\varphi^2 = \Sigma B_r^2$, une des trajectoires est une géodésique, l'autre une trajectoire vraie ou conjuguée suivant que $\Sigma A_r B_r$ est positif ou négatif. Pour $\varphi^2 < \Sigma B_r^2$, (C_1) et (C_2) sont toutes deux vraies ou conjuguées, suivant le signe de $\Sigma A_r B_r$. Quand $\Sigma A_r B_r$ est nul, φ^2 est nécessairement plus grand que ΣB_r^2 ; pour $\varphi^2 = \Sigma B_r^2$, (C_1) et (C_2) se confondent avec la géodésique.

D'où cette conclusion : V_k désignant un domaine de E_k où les A_{ij} , Q_i sont uniformes et réguliers, par un point M_1 de V_k passent deux trajectoires réelles (C_1) et (C_2) ayant en M_1 une tangente $M_1 T$ et une courbure $\frac{1}{R}$ données, pourvu que la courbure soit supérieure à une certaine limite L . Soit de plus $\frac{1}{R_1}$ la courbure de la géodésique (G) tangente en M_1 à $M_1 T$ $\left(\frac{1}{R_1} > L\right)$: si $\frac{1}{R}$ est supérieur à $\frac{1}{R_1}$, les trajectoires (C_1) et (C_2) sont l'une vraie, l'autre conjuguée; si $\frac{1}{R}$ est égal à $\frac{1}{R_1}$, une de ces trajectoires est la géodésique (G) ; si $\frac{1}{R}$ est inférieur à $\frac{1}{R_1}$, (C_1) et (C_2) sont toutes deux vraies ou toutes deux conjuguées suivant que la seconde trajectoire de courbure $\frac{1}{R_1}$ est vraie ou conjuguée; quand cette seconde trajectoire se confond elle-même avec la géodésique, $\frac{1}{R_1}$ coïncide avec L . Il n'y a d'exception à ce théorème que si la tangente $M_1 T$ a comme direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ ⁽¹⁾. Quand tous les Π_i , par suite tous les B_r , sont nuls, à toute valeur de $\frac{1}{R}$ comprise entre 0 et $+\infty$ correspondent deux trajectoires, l'une vraie, l'autre conjuguée.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où M arriverait en M_1 à l'instant t_1 avec une vitesse nulle. Montrons d'abord que les rapports $\frac{q'_i}{q'_1}$ tendent vers une limite quand t tend vers t_1 . On a,

(1) Ces théorèmes et d'autres analogues prennent une forme plus élégante quand on regarde, d'après les idées de M. Beltrami, $q_1, q_2, \dots, q_k$ comme les coordonnées d'un espace non euclidien dont le ds^2 est le ds^2 défini par T , $ds^2 = \Sigma \Lambda_{ij} dq_i dq_j$. Mais c'est là un point sur lequel je reviendrai dans un autre travail.

en effet,

$$q_i = \frac{(t - t_1)^2}{1.2} [\beta_i(a_1, a_2, \dots, a_k) + \delta_i] = \frac{(t - t_1)^2}{2} (\beta_i^0 + \delta_i),$$

$$(i = 2, \dots, k),$$

les δ_i tendant vers zéro avec $t - t_1$, et l'un au moins des β_i^0 , soit β_1^0 , n'étant pas nul ⁽¹⁾. Les rapports $\frac{q'_i}{q_1}$ tendent donc vers $\frac{\beta_i^0}{\beta_1^0}$. J'ajoute que les intégrales $q_i(t)$ sont alors des fonctions paires de $(t - t_1)$; autrement dit, si l'on pose $t - t_1 = \tau = \theta^2$, on a

$$(n) \quad q_i = a_i + b_i\theta + c_i\theta^2 + \dots, \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (b_1 \neq 0).$$

Si, en effet, dans les intégrales $q_i(\tau)$ on change τ en $-\tau$, on obtient encore un système d'intégrales : quand le premier système répond aux conditions initiales $q_i^0, q_i'^0$ pour $t = t_1$, le second répond aux conditions $q_i^0, -q_i'^0$; ici, les $q_i'^0$ étant nuls, les conditions initiales restent les mêmes, les deux systèmes d'intégrales coïncident. Donc $q_i(\tau) \equiv +q_i(-\tau)$. Quand t dépasse l'instant t_1 , le système S *rétrograde*; à l'instant $t_1 + \tau$ il repasse par la même position qu'à l'instant $t_1 - \tau$, mais toutes les vitesses ont changé de sens.

Les équations (n) nous montrent que la trajectoire (C) se poursuit *au delà de* M_1 , et admet en M_1 et dans le voisinage *une tangente continue*. Cette tangente, au point M_1 , a comme direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. De plus, σ désignant l'arc de (C) compté dans le sens du mouvement, on a

$$\frac{d\sigma}{dt} = (t - t_1) (-\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2} + \varepsilon) = (t - t_1)(B + \varepsilon)$$

(ε tendant vers zéro avec $t - t_1$); $\sigma(t)$ passe donc par un maximum pour $t = t_1$. Sur l'arc M_1M' de (C), qui fait suite au point M_1 , c'est le mouvement *conjugué* qui est réel. Le point M_1 de (C) où le point M rétrograde sur sa trajectoire sera dit un *point d'arrêt*. L'arc MM' que le point M_1 divise en deux parties, l'une parcourue dans le mouvement *vrai*, l'autre dans le mouvement *conjugué*, sera dit *trajectoire mixte*.

Au point d'arrêt M_1 la courbe (C) peut d'ailleurs ne pas admettre de *courbure*. Si l'on suppose toutefois qu'en ce point les coeffi-

(1) Autrement M_1 serait un point d'équilibre et t_1 serait infini.

cients $\lambda_{r,s}^t$, β_i des équations (2) ont des dérivées secondes continues par rapport aux q_i , les q_i ont des dérivées secondes par rapport au paramètre $\theta \equiv (t - t_1)^2$, et (C) admet en M_1 et dans le voisinage une courbure continue. Si notamment le point M_1 est un point *analytiquement* régulier des A_{ij} , Q_i , la courbe (C) est analytique et régulière dans le domaine de M_1 .

Trajectoires singulières. — Supposons maintenant que, t croissant indéfiniment, M tende vers une position régulière d'équilibre P . La trajectoire (C) passe par le point P , mais en ce point elle n'admet pas nécessairement de tangente; la longueur de l'arc PM peut être infinie; enfin la courbe *réelle* (supposée analytique) peut ne pas se prolonger au delà du point P .

Soit, par exemple, un point M (ou x, y) de masse 1 mobile dans un plan et soumis à la force $X = \lambda^2 x$, $Y = \mu^2 y$; l'origine O ($x = 0$, $y = 0$) est un point d'équilibre, et il existe une infinité de mouvements dans lesquels M tend vers O quand t croît indéfiniment, à savoir les mouvements $x = Ce^{-\lambda t}$, $y = C'e^{-\mu t}$; les trajectoires correspondantes $y = cx^{\frac{\mu}{\lambda}}$ admettent l'origine comme point singulier transcendant si $\frac{\mu}{\lambda}$ est incommensurable, algébrique si $\frac{\mu}{\lambda}$ est commensurable. Dans tous les cas, la courbe admet une tangente à l'origine, l'arc σ ou M_0M tend vers une limite finie quand M tend vers O , et ce point n'est pas une *extrémité analytique* de la trajectoire.

Si la force était $X = 2x^3$, $Y = \mu^2 y$, la trajectoire $y = Ce^{-\frac{\mu}{x}}$, parcourue dans chaque mouvement $x = \frac{1}{t}$, $y = Ce^{-\mu t}$, admet une tangente en O (l'axe des x); l'arc OM_0 a une longueur finie, mais le point O est une extrémité analytique de la trajectoire.

La force $X = 2y$, $Y = -2x$ donnerait lieu de même aux mouvements $x = Ce^{-t} \cos t$, $y = Ce^{-t} \sin t$, et chaque trajectoire correspondante (dont l'équation en coordonnées polaires est $r = Ce^{-\theta}$) est une spirale logarithmique ayant l'origine comme point asymptote. En ce point, la courbe n'a pas de tangente; l'arc OM_0 a une longueur finie $C\sqrt{2}e^{-\theta_0}$, mais le point O est une extrémité analytique de la trajectoire.

Enfin, considérons la force

$$X = \frac{3}{4}x(x^2 + y^2)^2 - x + y(x^2 + y^2), \quad Y = \frac{3}{4}y(x^2 + y^2)^2 - y - x(x^2 + y^2);$$

le mouvement est défini, en coordonnées polaires, par les équations

$$r'' - r\theta'^2 = \frac{3}{4}r^5 - r, \quad \frac{d}{dt}(r^2\theta') = -r^4.$$

Dans le mouvement particulier $r = t^{-\frac{1}{2}}$, $\theta = t$, la trajectoire $r = \theta^{-\frac{1}{2}}$ admet O comme point asymptote (et extrémité analytique), et l'arc MM_0 croît indéfiniment quand M tend vers O.

Nous donnerons le nom de *branche singulière* de trajectoire à tout arc M_1M de trajectoire, tel que M_1M ne soit pas parcouru en un temps fini soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué, et cela si voisin du point M_1 qu'on prenne le point M.

Il est clair que les trajectoires que nous venons de considérer sont des *trajectoires singulières*.

CLASSIFICATION ET PROPRIÉTÉS DES TRAJECTOIRES RÉELLES.

Il suffit d'étudier les trajectoires vraies : tout ce que nous allons dire s'appliquera aux trajectoires conjuguées, puisqu'on passe du mouvement vrai au mouvement conjugué en changeant t en it .

Plaçons donc le système à l'instant t_0 dans des conditions initiales réelles $q_1^0, q_2^0, \dots, q_k^0; q_1'^0, q_2'^0, \dots, q_k'^0$, et comptons l'arc σ de la trajectoire (C) à partir du point M_0 dans un sens tel que σ commence par croître avec t ; σ continuera de croître avec t tant que t n'atteindra pas soit une valeur t_1 pour laquelle le mouvement cesse d'être régulier, soit une valeur t_1 pour laquelle $\frac{d\sigma}{dt}$, et par suite tous les q_i' s'annulent.

Envisageons d'abord la première hypothèse : quand t tendra vers t_1 , ou bien le point M de coordonnées $(q_1, q_2, \dots, q_k)$ ne tendra vers aucune position limite M_1 à distance finie, auquel cas σ croîtra indéfiniment, ou bien M tendra vers un point singulier N de E_k . D'après ce qui précède, il n'y a pas d'autres cas possibles.

Dans la seconde hypothèse (où tous les q_i s'annulent quand t tend vers t_1), σ croît jusqu'à une certaine limite σ_1 , puis décroît et reprend pour $t_1 + \alpha$ la même valeur que pour $t_1 - \alpha$; le point M rétrograde sur sa trajectoire, qui est une trajectoire *mixte*; le point M_1 , qui correspond à la valeur σ_1 de l'arc, est un *point d'arrêt*. Quand la trajectoire (C) n'est pas une trajectoire *remarquable*, $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ a en chaque point de M_0M une valeur déterminée $\varphi(\sigma)$; l'égalité (*voir* p. 164)

$$\sigma - \sigma_1 = (t - t_1)^2 \left(\frac{B}{2} + \varepsilon' \right)$$

et sa conséquence

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = (\sigma - \sigma_1)(2B + \varepsilon'')$$

prouvent que $\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$ ou $\varphi(\sigma)$ reste fonction continue de σ (mais change de signe) quand σ dépasse la valeur σ_1 .

Le faisceau des trajectoires mixtes (Γ) dépend de k constantes arbitraires, par exemple les k coordonnées $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ du point d'arrêt M_1 . Il peut se faire toutefois que ces k constantes ne soient pas distinctes; cela n'a lieu que si la même trajectoire mixte (Γ) correspond à une infinité de valeurs des constantes $a_1, a_2, \dots, a_k$, telles qu'on puisse prendre arbitrairement au moins l'une d'entre elles. S'il en est ainsi, tous les points d'un segment de (Γ) sont des points d'arrêt et, par suite, une infinité de mouvements sont possibles sur (Γ) qui doit être une trajectoire *remarquable*. Comme, d'autre part, par un point M_0 il passe au moins une trajectoire mixte, à savoir celle qui admet M_0 comme point d'arrêt, on voit que le faisceau des trajectoires mixtes (Γ) dépend soit de k constantes, soit de $(k - 1)$ constantes; dans ce dernier cas (qui est un cas particulier), le faisceau (Γ) se confond avec celui des trajectoires remarquables.

Une trajectoire *remarquable* (γ) doit d'ailleurs être regardée comme une trajectoire mixte, en ce sens qu'un point quelconque de (γ) est *point d'arrêt* pour un des mouvements de M sur (γ). En effet, tous ces mouvements sont définis par une égalité de la forme

$$T = f(q_1) + h.$$

où h est une constante arbitraire. Soit pour $t = t_0$, $q_1 = a_1$ et soit $h = -f(a_1)$; au point $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de (γ) la force vive, et par suite $q'_1, \dots, q'_k$, s'annulent, et M rétrograde sur (γ) . Mais il peut exister sur (γ) des mouvements qui aient lieu toujours dans le même sens. Par exemple, si (S) est un point, mobile dans le plan des xy et repoussé par l'origine O proportionnellement à la distance, Ox est une trajectoire remarquable, et les mouvements sur Ox sont définis par l'égalité

$$x'^2 = k^2 x^2 + h;$$

si h est positif, x' ne s'annule pas et l'axe des x est parcouru tout entier dans le même sens quand t croît de $-\infty$ à $+\infty$. Si h est négatif, le mouvement présente un point d'arrêt.

Il importe de préciser les conditions dans lesquelles les trajectoires *mixtes* et les trajectoires *remarquables* se confondent. Considérons un domaine V_k de E_k dans lequel les déterminations prises pour les A_{ij} , Q_i soient uniformes et régulières. D'après une remarque faite plus haut, dans tous les cas V_k se décompose en domaines partiels V'_k, V''_k caractérisés par la propriété suivante : dans un domaine V'_k , par un point M quelconque passe une trajectoire remarquable ; dans un domaine V''_k , les points qui appartiennent à une trajectoire remarquable ne forment pas un domaine fini à k dimensions. Ceci rappelé, il est clair que *par un point d'un domaine V'_k passe une trajectoire mixte, et une seule, ayant un point d'arrêt dans V'_k* ; le faisceau de ces trajectoires est formé, en effet, des trajectoires qui passent par chaque point M de V'_k et correspondent à une vitesse nulle en ce point, conditions initiales qui définissent la trajectoire *remarquable* passant par M . Au contraire, *par un point arbitraire de V''_k passent une infinité de trajectoires mixtes dépendant d'une constante arbitraire* (et ayant un point d'arrêt dans V''_k) : autrement, ces trajectoires ne dépendraient dans V''_k que de $(k-1)$ constantes distinctes et seraient des trajectoires remarquables ; un point arbitraire de V''_k appartiendrait donc à une trajectoire remarquable, ce qui est contre l'hypothèse.

Pour que le faisceau des trajectoires mixtes se confonde avec le faisceau des trajectoires remarquables, il faut donc et il suffit que par un point arbitraire de E_k (quelles que

soient les déterminations choisies pour les A_{ij} , Q_i) passe une trajectoire remarquable.

Dans la discussion précédente, nous avons supposé t_1 fini : si le mouvement reste régulier quand t croît indéfiniment, ou bien M ne tend vers aucune position limite M_1 et l'arc σ de (C) croît indéfiniment avec t , ou bien M tend vers un point d'équilibre P qui peut être un point singulier quelconque de (C) .

D'après cela, soit M un point quelconque de E_k dans le voisinage duquel les déterminations prises pour les A_{ij} , Q_i sont régulières, et qui n'est pas un point d'équilibre. Toute trajectoire (C) qui aboutit au point M admet une tangente en ce point et se prolonge au delà; si, en effet, (C) n'est pas une géodésique, T a au point M une valeur bien déterminée, soit T_0 ; quand T_0 est différent de zéro, la trajectoire se prolonge dans le mouvement même (vrai ou conjugué); quand T_0 est nul, les deux mouvements (vrai et conjugué) qui répondent à la position initiale M et aux conditions initiales $q_i^0 = 0$ définissent la trajectoire (C) en deçà et au delà de M . Si (C) est une géodésique, la chose est encore vraie, lors même que M est un point d'équilibre : on le voit en appliquant les théorèmes établis plus haut au cas particulier où tous les Q_i sont nuls. Les trajectoires remarquables sont des géodésiques : il y a lieu toutefois de signaler ici les trajectoires dont un segment seulement M_0M est remarquable et, par suite, coïncide avec un segment de géodésique; une infinité de trajectoires MM' prolongent alors le segment M_0M , suivant la valeur de h dans l'égalité $T = f(q_i) + h$ qui définit le mouvement sur M_0M (voir l'exemple de la p. 147).

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

Soit (C) une trajectoire définie par la position et la vitesse initiales M_0 et (v_0) de M , les déterminations choisies pour les coefficients A_{ij} , Q_i étant régulières dans le domaine du point M_0 . Il n'y a aucune difficulté à suivre les variations des A_{ij} , Q_i le long de (C) tant qu'une au moins de ces fonctions ne devient pas discontinue ou égale à une autre détermination du même coefficient. Ceci posé, toute trajectoire réelle (C) est prolongeable régulièrement ⁽¹⁾ tant qu'elle ne rencontre pas soit un point sin-

(1) J'entends par là qu'en chaque point, la courbe admet une tangente con-

gulier N des déterminations considérées des A_{ij} , Q_i , soit un point d'équilibre P (point où tous les Q_i s'annulent) : en chaque point M la courbe (C) admet une courbure continue, sauf peut-être aux points d'arrêt si c'est une trajectoire mixte (non remarquable).

En particulier, toute géodésique se prolonge régulièrement et admet une courbure continue tant qu'elle ne rencontre pas un point singulier N des A_{ij} .

Si les coefficients A_{ij} , Q_i sont des fonctions analytiques des q_i , toute trajectoire (C) est une courbe analytique qui se prolonge régulièrement (au sens analytique) tant qu'on ne rencontre pas soit un point N où les A_{ij} , Q_i cessent d'être holomorphes, soit un point d'équilibre.

Soit donc M_0M un fragment continu de la même trajectoire réelle (C) , qui ne passe ni par un point singulier N des A_{ij} , Q_i , ni par un point d'équilibre P . La courbe admettant en chaque point (les extrémités comprises) une tangente continue, la longueur totale de cet arc est un certain nombre fini σ . Si (C) n'est pas une trajectoire mixte (ce qui est le cas général, le faisceau des trajectoires mixtes ne dépendant que de k constantes), l'arc M_0M est parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini, soit dans le mouvement vrai, soit dans le mouvement conjugué. Ceci est encore vrai, quand la trajectoire (C) étant mixte (sans être remarquable) n'admet pas de points d'arrêt entre M_0 et M .

Si (C) est une trajectoire mixte, en général elle ne possède qu'un point d'arrêt M_1 . Quand ce point fait partie de l'arc M_0M , cet arc est décomposé en deux parties M_0M_1 et M_1M , l'une trajectoire vraie, l'autre trajectoire conjuguée. Il peut arriver pourtant qu'entre M_1 et M il existe plusieurs points d'arrêt $M_1, M_2, \dots$, mais il n'en existe jamais qu'un nombre fini; supposons, en

tinne sans rebroussement. Ce prolongement ne comporte aucune ambiguïté, sauf dans le cas où (C) est une trajectoire dont des segments partiels sont remarquables; les segments en question appartiennent alors à une infinité de trajectoires réelles. Ce cas ne saurait se présenter quand les A_{ij} , Q_i sont analytiques et sans coupures fermées.

effet, que $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \varphi(\tau)$ admette une infinité de zéros

$$\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots < \tau;$$

τ_n tend vers une limite $\tau' \leq \tau$ quand n croît indéfiniment et la fonction $\varphi(\tau)$, continue entre τ' et τ , s'annule pour $\tau = \tau'$; comme, par hypothèse, le point M' correspondant n'est pas un point d'équilibre, on a

$$\varphi(\tau) = (\tau - \tau')(2B + \varepsilon), \quad (B \neq 0),$$

ce qui montre que $\varphi(\tau)$ n'admet dans le voisinage de τ' d'autre zéro que τ' ; l'hypothèse est donc absurde.

D'après cela, on pourra toujours décomposer l'arc M_0M en un nombre fini de segments qui seront tout entiers les uns trajectoires vraies, les autres trajectoires conjuguées. A chaque segment M_1M_2 , compris entre deux points d'arrêt, correspond un mouvement périodique du système (vrai ou conjugué).

Si le segment M_0M est une trajectoire remarquable, chaque point de M_0M est un point d'arrêt d'un des mouvements correspondants; mais on peut toujours, dans l'égalité

$$(x) \quad T = f(q_1) + h = F(\tau) + h,$$

prendre h assez grand pour que M_0M soit parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement vrai. De plus, aucun des mouvements qui ont lieu sur (C) ne saurait présenter entre M_0 et M deux points d'arrêt. Admettons, en effet, que T s'annule en M_1 et en M_2 ; d'après l'égalité (x) , $F'(\tau)$ (qui est continu en M_0 et M) s'annule entre M_1 et M_2 , donc entre M_0 et M ; si $F'(\tau)$ est identiquement nul, T est constant et différent de zéro; sinon, soit τ' le premier zéro de $F'(\tau)$ qu'on rencontre en partant d'un point μ de M_0M où $F'(\tau)$ est différent de zéro et en allant vers M (ou vers M_0); je dis que le point M' (ou τ') de C doit être un point d'équilibre P ; il suffit, pour le voir, de considérer le mouvement défini sur (C) par l'égalité

$$T = F(\tau) - F(\tau') = (\tau - \tau')^2 - F_1(\tau);$$

comme, entre μ et M' , $F_1(\tau)$ s'annule au plus une fois (soit en M_1) le long d'un arc fini M_1M' , le signe de F_1 est constant, et il est loisible de le supposer positif (sinon on changerait t en $-t$); on a

done

$$dt = \frac{d\sigma}{\sigma - \sigma'} g(\sigma),$$

$g(\sigma)$ restant supérieur à un certain nombre positif quand σ varie entre $\sigma' - \alpha$ et σ' ; t croît donc indéfiniment quand σ tend vers σ' , ou encore σ tend vers σ' quand t croît indéfiniment. Cela n'est possible que si M' est un point d'équilibre ⁽¹⁾. Il suit de là que pour h suffisamment grand ($h > h_1$) le segment M_0M sera parcouru en entier dans le mouvement vrai correspondant; pour h inférieur à une certaine limite h_2 , le segment sera parcouru en entier dans le mouvement conjugué; pour h compris entre h_1 et h_2 , M_0M se décomposera en deux parties, parcourues l'une dans le mouvement vrai, l'autre dans le mouvement conjugué; h_1 et h_2 peuvent être infinis.

Enfin si le segment M_0M n'est que *partiellement* une trajectoire remarquable, par exemple si le segment M_0M' est remarquable et le segment $M'M$ ordinaire, la valeur de T au point M' détermine la valeur de h , donc de T , le long de M_0M' ; T a ainsi une valeur bien définie le long de M_0M qui jouit, par suite, des mêmes propriétés qu'une trajectoire *ordinaire*.

Branches de trajectoires singulières. — Admettons maintenant que le segment M_0M passe par des *points d'équilibre* P (mais non par des points singuliers). Soit P le premier point

(1) Il est facile de vérifier cette conclusion ainsi. On a

$$F'(\sigma) = Q_1 \frac{dq_1}{d\sigma} + Q_2 \frac{dq_2}{d\sigma} + \dots + Q_k \frac{dq_k}{d\sigma};$$

mais, d'autre part, (C) étant une trajectoire remarquable, on sait que

$$\frac{dq_i}{d\sigma} = \frac{dq_i}{d\sigma}, \quad (i = 2, 3, \dots, k);$$

d'où l'égalité

$$F'(\sigma) = \frac{Q_1 \beta_1 + \dots + Q_k \beta_k}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_k^2}},$$

ou bien, comme $Q_i = \sum_{j=1}^k A_{ij} \beta_j$

$$F'(\sigma) = \frac{T(q_1, q_2, \dots, q_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_k^2}},$$

expression qui ne peut être nulle que si tous les β_i sont nuls.

d'équilibre que l'on rencontre sur M_0M en partant de M_0 ; étudions le segment M_0P en supposant d'abord que (C) n'est pas une trajectoire remarquable.

Dans cette hypothèse, $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$ est une fonction de τ , continue tant que M reste compris entre M_0 et P ; mais qu'arrive-t-il quand M tend vers P ? Je dis que $\varphi(\tau)$ tend vers une limite. Tout d'abord, si $\varphi(\tau)$ tend vers zéro, la proposition est démontrée; s'il n'en est pas ainsi, on peut trouver sur (C) des points M aussi voisins que l'on veut de P et tels que $\varphi(\tau)$ (et par suite un au moins des $q_i'^2$) ait en M une valeur absolue supérieure à un certain nombre fixe λ^2 . En répétant alors identiquement le raisonnement de la page 160 (soit sur le mouvement vrai, soit sur le mouvement conjugué), on voit que M doit atteindre en un temps fini la position P avec une force vive déterminée et finie, et par suite le mouvement, comme la trajectoire (C), se prolongent régulièrement au delà de P . En résumé, *$f(\tau)$ tend vers une limite $f(P)$ quand on fait tendre M vers P sur la courbe MP , et, si cette limite n'est pas nulle, le point P est un point ordinaire de (C).*

Si au contraire $f(P)$ est nul, l'arc M_0P ne saurait être parcouru en un temps fini dans le mouvement soit vrai, soit conjugué, et cela si voisin de P qu'on prenne M_0 sur la trajectoire. Le segment M_0P est donc, d'après notre définition, *une branche singulière de trajectoire*. Mais deux circonstances distinctes peuvent se présenter suivant que $f(\tau)$ s'annule ou non un nombre infini de fois entre M_0 et P . Plaçons-nous d'abord dans ce dernier cas qui est le plus général.

1° *Il n'existe entre M_0 et P qu'un nombre fini de zéros de $f(\tau)$.* Il suffit alors de considérer le segment M_1P adjacent à P et où $f(\tau)$ garde un signe constant qu'il est loisible de supposer positif. Quand t croît, le point M placé entre M_1 et P et lancé vers P tangentiellement à (C) avec la vitesse $\frac{d\tau}{dt}$ tend vers P quand t croît indéfiniment. Le point P peut être un point singulier quelconque et une extrémité analytique de (C). Nous avons donné plus haut des exemples de cette singularité.

2° *$f(\tau)$ admet une infinité de zéros $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ entre M_0 et P .* Les points d'arrêt $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ tendent vers P

quand n croît indéfiniment. Le segment $M_1 P$ se trouve ainsi décomposé en une *infinité* de segments $M_1 M_2, M_2 M_3, \dots$ qui tendent vers P et qui correspondent à autant de mouvements *périodiques* (alternativement vrais ou conjugués), dont l'*amplitude* tend vers zéro. Comme exemple de ce cas, citons les équations

$$(A) \quad \begin{cases} x'' = \frac{xy}{2} \left[\frac{7}{4} (x^2 + y^2)^2 - 3 \right] + \frac{1}{4} (x^2 + y^2) (5y^2 - x^2), \\ y'' = \frac{7}{8} y^2 (x^2 + y^2)^2 - \frac{3}{2} xy (x^2 + y^2) + \frac{x^2}{2} - y^2. \end{cases}$$

Une des trajectoires définie par (A) est la suivante

$$x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\theta}}, \quad y = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta}},$$

ou encore, en coordonnées polaires,

$$\theta = \frac{1}{r^2};$$

cette trajectoire admet l'origine (point d'équilibre) comme point asymptote, et le mouvement correspondant est défini par l'égalité

$$dt = \frac{d\theta \theta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sin \theta}} = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{\sqrt{r \sin \frac{1}{r^2}}}.$$

Sur chaque arc de courbe $2n\pi < \theta < (2n+1)\pi$ le mouvement vrai est réel et périodique, sur les arcs $(2n+1)\pi < \theta < 2(n+1)\pi$, c'est le mouvement conjugué qui est périodique.

Comme dans le premier cas, P peut être un point singulier de nature quelconque et une *extrémité* de (C); quand M tend vers P , τ peut tendre vers une limite, ou croître indéfiniment comme dans l'exemple ci-dessus.

Quand la courbe C, dans l'un ou l'autre cas, se prolonge au delà de P , elle peut passer par un autre point d'équilibre P_1 , etc. Il peut arriver que les points d'équilibre forment sur (C) une *suite* ayant certains points *limites* P' qui sont nécessairement des points d'équilibre ⁽¹⁾; mais, dans tous les cas, $f(\tau)$ est une fonc-

(1) Par exemple, soit M un point mobile dans un plan et soumis à une force qui s'annule tout le long d'une certaine courbe (C) et soit M_0 un point de cette

tion continue le long de M_0M , qui s'annule en tous les points d'équilibre *singuliers* pour la trajectoire et en particulier aux points limites P' .

Toutes les trajectoires singulières qui passent par un point d'équilibre P ou $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ s'obtiendront donc en cherchant toutes les intégrales du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \dots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{dq'_1}{\beta_1 + \Pi_1} = \frac{dq'_2}{\beta_2 + \Pi_2} = \dots = \frac{dq'_k}{\beta_k + \Pi_k},$$

qui satisfont aux conditions initiales

$$q_i = a_i, \quad q'_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Il nous reste à dire un mot du cas que nous avons laissé de côté où la trajectoire M_0P serait remarquable. Si cette trajectoire n'est que partiellement remarquable, ce qui précède subsiste; mais quand un segment fini attenant au point P , soit M_0P , est *tout entier* remarquable, on peut aller plus loin. Tout d'abord, disposons de la constante h de façon que le point M atteigne le point P avec une vitesse différente de zéro; *la trajectoire se prolonge alors régulièrement au delà du point P* . Si, au delà de P , la trajectoire est encore remarquable (ce qui a lieu nécessairement quand P est un point *analytiquement régulier* des A_{ij} , Q_i), ce prolongement n'est possible que d'une seule manière; sinon une infinité de trajectoires prolongent régulièrement M_0M .

Dans les deux cas, le mouvement sur M_0P étant défini par l'égalité

$$T = F(\sigma) + h,$$

si l'on donne à h la valeur $F(P)$, le point M tendra vers P quand t croîtra indéfiniment. Quand la trajectoire est encore remarquable au delà du point P , on a dans le voisinage de P (où $\sigma = \sigma'$)

$$T = h + (\sigma - \sigma')^2(A + \varepsilon),$$

A ayant une valeur finie et ε tendant vers zéro avec $(\sigma - \sigma')$. En effet, la trajectoire (C) , étant une géodésique, admet en chaque point, notamment au point P , une courbure continue, et l'égalité

courbe; il peut se faire qu'une trajectoire passant par M_0 rencontre (G) en une infinité de points voisins de M_0 qui soient tous points singuliers de la trajectoire.

$F'(\tau) = \sum Q_i \frac{dq_i}{d\tau}$ montre que $F''(\tau)$ existe au point P. Si A est négatif, les mouvements correspondant à de petites valeurs de h sont périodiques autour de P; si A est positif, la même remarque s'applique aux mouvements conjugués.

Observons qu'une trajectoire remarquable (γ) peut d'ailleurs renfermer un nombre infini de points d'équilibre P formant une suite. C'est ce que montre l'exemple des deux équations

$$2x'' = x^3 \left(5x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right), \quad y'' = 0,$$

qui admettent les trajectoires remarquables $y = y_0$ le long desquelles le mouvement est défini par la relation

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = x^3 \sin \frac{1}{x} + h;$$

toutes les racines x_i de l'égalité $\tan \frac{1}{x} = \frac{1}{5x}$ correspondent à des points d'équilibre P qui tendent vers l'origine.

Dans cet exemple, les fonctions $X, Y \equiv 0$ sont continues ainsi que leurs dérivées premières à l'origine. Mais il convient de remarquer que la singularité en question ne se présente pas si les coefficients A_{ij}, Q_i sont des fonctions *holomorphes* dans le domaine du point P. En effet, le point P est alors un point analytique régulier de la trajectoire (γ) et les variables q_i sont des fonctions holomorphes de τ dans le voisinage de τ' ; la fonction $F'(\tau) \equiv \sum Q_i \frac{dq_i}{d\tau}$ est donc holomorphe dans le voisinage de τ' , et τ' est nécessairement un zéro isolé de $F'(\tau)$. *Lors donc que le point d'équilibre P est un point analytiquement régulier des A_{ij}, Q_i , toute trajectoire remarquable M_0P est prolongeable analytiquement et reste au delà du point P régulière et remarquable; de plus P est un point d'équilibre isolé sur cette trajectoire.*

Observons enfin que les β_i peuvent être nuls tout le long du segment M_0M de la trajectoire (γ). Il faut pour cela et il suffit que la *géodésique* M_0M de T soit un lieu de points d'équilibre P. Le mouvement sur M_0M est alors le même que si le système S n'était soumis à aucune force; T est constant.

Remarque sur le cas où les forces Q_i dérivent d'un potentiel $U(q_1, q_2, \dots, q_k)$. — S'il existe une fonction de forces U , et si, de plus, les points d'équilibre P ne forment pas un ensemble continu, les trajectoires (C) qui passent par un point d'équilibre P sont nécessairement exceptionnelles.

Tout d'abord, les trajectoires (C) pour lesquelles P est un point ordinaire [$T \neq 0$ en P] dépendent seulement de k paramètres. Quant à celles pour lesquelles P est un point singulier [$T = 0$ en P], elles satisfont à la condition

$$U(a_1, a_2, \dots, a_k) + h = 0.$$

Ces trajectoires correspondent donc à des valeurs particulières de h , et par suite ne peuvent dépendre de plus de $(2k - 2)$ constantes.

CONCLUSIONS.

Les principaux résultats que nous avons obtenus au sujet des trajectoires réelles se résument ainsi :

Soit V_k un domaine de E_k dans lequel les déterminations choisies pour les fonctions A_{ij} , Q_i sont uniformes et continues; nous admettons de plus que les dérivées premières des Q_i et les dérivées secondes des A_{ij} sont aussi continues dans le même domaine.

I. *Par un point M de V_k passe une géodésique de T , et une seule, tangente à la direction MT ; toute géodésique est prolongeable régulièrement tant que l'on ne sort pas de V_k et admet en chaque point une courbure continue.*

II. *Toute trajectoire réelle (C) de (S) est prolongeable régulièrement tant que l'on ne sort pas de V_k ou que l'on ne rencontre pas dans V_k un point d'équilibre P (point où tous les Q_i sont nuls).*

Une trajectoire (C) ne comporte que deux mouvements distincts dont l'un se déduit de l'autre en changeant t en $-t$. Il n'y a d'exception que pour certaines trajectoires remarquables (γ) qui n'existent pas en général et qui se composent des géodésiques de T satisfaisant en même temps aux conditions

$$(A) \quad \frac{q'_1}{g_1} = \frac{q'_2}{g_2} = \dots = \frac{q'_k}{g_k}.$$

Ces trajectoires (γ) dépendent au plus de $(k - 1)$ constantes ; sur une telle trajectoire une infinité de mouvements distincts (dépendant d'une constante) sont possibles.

Tout segment de trajectoire réelle compris dans V_k et ne renfermant pas de point d'équilibre est parcouru tout entier dans le même sens d'un mouvement régulier soit vrai, soit conjugué. Il n'y a d'exceptions que pour une classe de trajectoires dépendant de k constantes, et qui se décomposent en segments alternativement vrais ou conjugués, les points de séparation étant des points d'arrêt où T s'annule et où le système rétrograde. Ces trajectoires (*trajectoires mixtes*) ne dépendent plus que de $(k - 1)$ constantes et se confondent avec les trajectoires remarquables quand toutes les courbes définies par (A) dans V_k sont des géodésiques.

Quand la trajectoire (C) rencontre dans V_k un point d'équilibre P, les conclusions précédentes subsistent si la trajectoire (C) est *remarquable*, ou si, (C) étant trajectoire ordinaire, T [qui a une valeur déterminée en chaque point de (C)] ne s'annule pas en P. Mais si T s'annule en P, l'arc M_0P de (C) ne saurait être parcouru en un temps fini (si petit que soit M_0P) dans le mouvement vrai ou conjugué. C'est une branche *singulière* de trajectoire qui peut admettre P comme point singulier quelconque et comme extrémité analytique.

Les seuls points de V_k par lesquels puisse passer une trajectoire sans tangente continue sont donc les points d'équilibre P.

III. On peut toujours admettre que V_k est tout entier soit de l'espèce V'_k (c'est-à-dire qu'un point quelconque de V_k appartient à une trajectoire remarquable), soit de l'espèce V''_k (c'est-à-dire que les trajectoires remarquables n'emplissent aucun domaine fini à k dimensions à l'intérieur de V_k).

Ceci posé, plaçons-nous d'abord dans le cas *particulier* où V_k est de l'espèce V'_k .

Toutes les trajectoires (C) qui passent par un point M de V_k qui n'est pas un point d'équilibre ont en ce point une tangente et une courbure continues. Par un point M passent deux trajectoires tangentes en M à une direction donnée MT et de courbure

donnée $\frac{1}{R}$, pourvu seulement que la direction MT ne soit pas la direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ et que $\frac{1}{R}$ soit supérieur à une certaine limite qui peut être nulle. Quand MT coïncide avec la direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$, toutes les trajectoires tangentes à MT se confondent avec la géodésique tangente en M à MT, qui est une trajectoire remarquable : il ne passe pas par M d'autre trajectoire *mixte*, ayant un point d'arrêt dans V_k .

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où V_k est de l'espèce V_k'' . *Toutes les trajectoires qui passent par un point M de V_k (qui n'est pas un point d'équilibre) admettent en M une tangente et une courbure continues, sauf peut-être la trajectoire unique qui admet M comme point d'arrêt.* Cette dernière a en M une tangente continue, mais n'a pas nécessairement de courbure. Par un point arbitraire M passent encore deux trajectoires tangentes à MT et de courbure donnée, pourvu que MT ne se confonde pas avec la direction $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. Si MT coïncide avec cette direction, il existe une infinité de trajectoires tangentes à MT, *mais toutes ces trajectoires ont même courbure en M*; il existe de plus une trajectoire *isolée* tangente à MT, admettant M comme point d'arrêt, et qui n'a pas nécessairement de courbure en M.

Par chaque point M de V_k passent une infinité de trajectoires *mixtes* (dépendant d'une constante arbitraire) et présentant un point d'arrêt M' dans V_k .

Que V_k soit de l'espèce V_k' ou V_k'' , si les A_{ij} , Q_i sont holomorphes dans V_k , toute trajectoire est une ligne analytique régulière dans V_k , sauf peut-être aux points d'équilibre P.

Soit maintenant P un point d'équilibre de V_k . *Par ce point passent une infinité de trajectoires (C) tangentes en P à la droite PT, et ces trajectoires ont même courbure que la géodésique qui leur est tangente* : elles se confondent avec cette géodésique dans le cas particulier où V_k est de l'espèce V_k' et où toutes les trajectoires remarquables passent par P. Mais le fait le plus important, c'est qu'il peut exister en dehors de ces trajectoires d'autres branches singulières passant par P et telles que le segment M_0P d'une de ces branches (si petit qu'il soit) ne soit

parcouru en un temps fini ni dans le mouvement vrai, ni dans le mouvement conjugué.

Ces branches singulières peuvent ne pas admettre de tangente au point P et ne pas se prolonger analytiquement au delà. Toutes ces branches s'obtiennent en cherchant les intégrales du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \dots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{dq'_1}{\beta_1 + \Pi_1} = \dots = \frac{dq'_k}{\beta_k + \Pi_k},$$

qui satisfont aux conditions initiales $q_i = a_i$, $q'_i = 0$, ($a_1, a_2, \dots, a_k$ étant les coordonnées des points P) (1). Ces conditions donnent en particulier les trajectoires remarquables qui passent par P.

IV. Enfin, quand les forces dérivent d'un potentiel, une trajectoire prise au hasard n'est ni mixte, ni remarquable, ni singulière; elle se prolonge donc régulièrement et est parcourue tout entière dans le même sens d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué) tant qu'on ne rencontre pas un point singulier des A_{ij} , Q_i .

Exemple. — Pour appliquer ces généralités à un exemple, traitons le cas d'un point matériel libre M ou (x, y, z) soumis à une force (F) qui dérive d'un potentiel $U(x, y, z)$, fonction holomorphe des trois variables réelles x, y, z ; nous admettons de plus que les trois dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ ne s'annulent simultanément qu'en des points isolés.

Toute trajectoire est une courbe analytique qui se prolonge indéfiniment d'une manière régulière tant qu'on ne rencontre pas un point d'équilibre. De plus, une trajectoire prise au hasard ne

(1) Quand il n'y a pas de point d'équilibre, il n'y a pas de branches singulières. En général, les points d'équilibre sont isolés, mais ils peuvent, dans des cas particuliers, former un ensemble continu. Par chaque point d'équilibre P, il peut ne passer qu'un nombre fini de branches singulières, ou il peut en passer une infinité dépendant de constantes; c'est ce dernier cas qui est réalisé dans les exemples cités plus haut; le premier est réalisé dans le mouvement défini par les équations

$$x'' = x, \quad y'' = -y,$$

où les seules trajectoires définies par les conditions initiales $x = 0, y = 0, x' = 0, y' = 0$ sont les deux axes Ox et Oy (trajectoires remarquables).

pas par un point d'équilibre; elle est prolongeable indéfiniment d'une façon régulière et un segment fini quelconque est parcouru tout entier dans le même sens en un temps fini d'un mouvement régulier (vrai ou conjugué).

Deux cas principaux sont d'ailleurs à distinguer suivant que les surfaces de niveau $U = \text{const.}$ forment ou non une famille de surfaces *parallèles*. Dans le premier cas, les normales à ces surfaces forment une congruence de trajectoires remarquables (γ). Toute trajectoire, autre que ces droites, est ou vraie, ou conjuguée. Les trajectoires mixtes se confondent avec les droites remarquables (γ). Par un point d'équilibre P passent *en général* une infinité de normales, formant un cône du second degré, et qui sont autant de trajectoires remarquables : si on place M sur une de ces droites (γ) avec une vitesse convenable, M tendra vers P quand t croîtra indéfiniment; la même droite comportera une infinité de mouvements périodiques (vrais ou conjugués) où M oscillera autour de P.

Quand les surfaces de niveau ne sont pas *parallèles*, il ne passe pas par un point arbitraire de trajectoire remarquable. Les trajectoires *mixtes* dépendent de trois constantes arbitraires.

Par un point M de l'espace (qui n'est pas un point d'équilibre) passent deux trajectoires tangentes à une droite donnée MT et de courbure donnée; l'une de ces trajectoires est vraie, l'autre conjuguée. Toutefois, si la direction de MT coïncide avec celle de (F), toutes les trajectoires tangentes à MT ont même courbure en M que la géodésique qui est la droite MT, c'est-à-dire ont en M une inflexion, sauf, toutefois, la trajectoire qui admet M comme point d'arrêt et dont la courbure en M n'est pas nulle en général : si la ligne d'action de (F) est trajectoire singulière, toutes les trajectoires tangentes en M à (F) se confondent avec cette droite (F). C'est ce qui a lieu, quel que soit M, quand les surfaces de niveau sont parallèles.

Par un point d'équilibre P passent une infinité de trajectoires tangentes à une direction donnée PT et toutes ces trajectoires (qui dépendent d'une constante arbitraire) ont une inflexion en P; toutefois, si PT est trajectoire remarquable, ces trajectoires se confondent avec la droite PT. Mais, de plus, il peut passer par P d'autres trajectoires *singulières* qui s'obtiennent en cherchant

toutes les intégrales du système

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{dx'}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy'}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}$$

qui satisfont aux conditions initiales $x' = y' = z' = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$ (a , b , c étant les coordonnées du point P).

Soit, par exemple, un point M attiré par l'origine proportionnellement à la distance; les surfaces de niveau sont des sphères de centre O, famille parallèle; les trajectoires vraies sont les ellipses concentriques à l'origine, les trajectoires conjuguées les hyperboles; enfin les trajectoires mixtes, confondues avec les trajectoires remarquables, sont les droites (γ) issues de l'origine. Quand on remplace l'attraction par une répulsion, les trajectoires vraies et les trajectoires conjuguées se permutent. Les trajectoires singulières passent par le point d'équilibre O et se confondent avec les droites (γ).

Soit maintenant un point M de masse 1 soumis à la force (F) qui dérive du potentiel $U = xy$. Les trajectoires s'obtiennent en éliminant t entre les relations

$$x = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma \cos t, \quad y = \alpha e^t + \beta e^{-t} - \gamma \cos t, \quad z = ct + c'.$$

Les trajectoires mixtes correspondent aux valeurs des constantes $\alpha = \beta$ et $c = 0$. Les seules trajectoires remarquables sont l'axe des z et les droites $y = \pm x$, $z = c'$, qui se confondent avec les branches singulières passant par chaque point d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, $z = c'$. Si le potentiel était $\frac{x^4 + y^2}{2}$, les seules trajectoires remarquables seraient l'axe des z et les droites $x = 0$, $z = c'$ d'une part et $y = 0$, $z = c'$ d'autre part, mais par chaque point d'équilibre $x = 0$, $y = 0$, $z = c'$ passeraient une infinité de trajectoires singulières

$$y = Ce^{\pm \frac{1}{x}}, \quad z = c'.$$

Revenons au mouvement général d'un point. Pour que chaque mouvement vrai du point M soit *périodique*, il faut et il suffit qu'une trajectoire vraie prise au hasard soit une trajectoire fermée (c'est-à-dire qu'en la prolongeant régulièrement à partir d'un quel-

conque de ses points, on revienne au point de départ). Pour qu'un mouvement particulier seulement soit périodique, il faut ou que la trajectoire vraie correspondante soit fermée et ne renferme pas de branche singulière, ou que ce soit une trajectoire mixte admettant deux points d'arrêt entre lesquels le mouvement vrai est réel et régulier, ou enfin que ce soit une trajectoire remarquable (une droite) qui passe par un point d'équilibre P correspondant à un maximum de U sur la droite.

D'une manière générale, un mouvement d'un système quelconque sera périodique chaque fois que la trajectoire correspondante sera une courbe *fermée* qui ne passera ni par un point singulier intrinsèque, ni par un point d'équilibre, pourvu toutefois que la trajectoire ne soit pas une trajectoire remarquable : par trajectoire fermée, j'entends une trajectoire (C) telle que le système (S) partant d'une position quelconque sur (C) et parcourant (C) dans le même sens, revienne à sa position initiale. Mais quand (C) est une trajectoire remarquable, il faut de plus que, dans le mouvement, (S) revienne à la position initiale avec la même force vive, ce qui n'a pas lieu nécessairement. Par exemple, soit un point M de masse 1 mobile sur l'hyperboloïde de révolution $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ et soumis à la force $X = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Y = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $Z = 0$; le cercle de gorge de la surface est une trajectoire remarquable fermée qui ne passe ni par un point d'équilibre ni par un point singulier intrinsèque; sur ce cercle, le mouvement est défini par l'égalité $dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\theta + h}}$, et l'on voit que le cercle, quand t croît, est décrit un nombre indéfini de fois avec une vitesse toujours croissante.

Remarques sur les théorèmes précédents. — La proposition fondamentale sur laquelle repose toute la discussion précédente, c'est que les vitesses d'un système restent déterminées, finies et continues tant que le système occupe à chaque instant une position déterminée qui n'est pas une position singulière; mais nous n'avons rien dit du cas où le système traverse une position singulière, non plus que du cas où le système, quand t tend vers t_1 , ne tend pas vers une position déterminée à distance finie.

Quand (S) atteint une position *singulière non intrinsèque*, la

difficulté n'est pas sérieuse, puisqu'on la tourne à l'aide d'un simple changement de variables. Mais, si la singularité N est intrinsèque, deux circonstances sont possibles suivant que les vitesses tendent ou non vers une limite quand le système tend vers la position N. Dans la première hypothèse, il faut avoir recours aux méthodes de M. Poincaré qui permettent, dans des cas très étendus, de discuter les intégrales correspondant à des valeurs initiales singulières ⁽¹⁾.

Mais une difficulté bien plus grave réside dans cette circonstance que les vitesses peuvent être indéterminées quand (S) tend vers N, ainsi que dans le fait que, t tendant vers t_1 , (S) peut ne pas tendre vers une position limite. Dans un autre travail, nous ferons voir que ni l'une ni l'autre de ces singularités ne saurait se présenter *quand les équations du mouvement satisfont à certaines conditions*. Ces conditions remplies, il est *théoriquement* possible de représenter les fonctions $q_i(t)$ à l'aide de développements qui convergent pour *toutes* les valeurs réelles de t ; la difficulté consiste à choisir un mode de développement adapté aux équations étudiées; c'est ici que les nouvelles méthodes d'approximation de M. Picard semblent appelées à jouer un rôle considérable.

(1) Lors même que cette discussion analytique peut être menée à bonne fin, on sait qu'elle ne permet pas en général de déterminer *sans ambiguïté* le mouvement ultérieur du système. Par exemple, soit M un point de masse 1 mobile dans le plan des xy et soumis à la force $X = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, $Y = 0$, force bien définie et continue en chaque point, mais pour laquelle $\frac{\partial X}{\partial x}$ est discontinue le long de l'axe des y . Chaque fois que le mobile atteint l'axe des y avec une vitesse dirigée selon cet axe, on a le choix entre trois mouvements ultérieurs possibles, à savoir le mouvement défini par l'égalité $y = at + b$ jointe à l'une des égalités

$$x \equiv 0, \quad x = \frac{1}{9}(t - t_0)^3, \quad x = -\frac{1}{9}(t - t_0)^3.$$

Le mobile peut d'ailleurs arriver au point d'équilibre $x = 0$, $y = b$ en un temps fini, avec une vitesse nulle. Dans d'autres cas, on a le choix entre une infinité de mouvements.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1894.

PRÉSIDENTE DE M. PICQUET.

Démissions :

M. A. Jonquière, M. Ribot et M. le général Dewulf adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Lecornu : *Sur le théorème des aires.*

M. Lecornu : *Sur la théorie mécanique de l'escarpolette.*

M. Humbert : *Sur les arcs des courbes algébriques planes ou gauches.*

M. E. Genty adresse une *Note sur la déformation infinitésimale des surfaces.*

M. Ém. Picard transmet une Note de M. Vessiot *Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique.*

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1894.

PRÉSIDENTE DE M. PICQUET.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. G. Maupin, présenté par MM. Laisant et Bioche ; M. L. Desaint, présenté par MM. Laisant et Max Genty.

Communications :

M. Fleury : *Explication d'un paradoxe de Jean Bernoulli.*

M. Fouret : *Sur un théorème de Mécanique.*

M. Humbert : *Sur les couples de deux quadriques qui peuvent être touchées chacune en quatre points par une troisième.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE DES LIGNES GÉODÉSIQUES;

Par M. J. ANDRADE.

I. Lorsqu'un mobile assujéti à rester sur une surface est abandonné à lui-même avec une vitesse initiale, il décrit une géodésique de la surface tangente à la direction de la vitesse initiale. Si une force, ne dépendant que de la position du même mobile, vient à agir sur lui, la trajectoire réelle différera peu de la géodésique tangente à la vitesse initiale, pourvu que celle-ci ait une valeur suffisamment grande.

Cette proposition extrêmement vraisemblable, admise quelquefois comme évidente, mérite d'être précisée davantage.

II. Pour abrégér le langage, je dirai qu'une surface est *régulière* autour d'un arc géodésique OM_0M_1 parcouru dans le sens où l'on rencontre dans l'ordre énoncé les trois points consécutifs de cet arc, si cet arc satisfait aux conditions suivantes :

1^o L'arc considéré est intérieur à un domaine D de la surface, domaine aux divers points duquel existe un plan tangent et restent finies les deux courbures principales;

2^o On peut, à l'intérieur de ce domaine D , *séparer* deux domaines, l'un Ω entourant le point O , l'autre Δ comprenant à son intérieur l'arc M_0M_1 de manière que les géodésiques Γ , *contenues* dans le domaine D et joignant un point quelconque O' de Ω à un point quelconque de Δ , soient déterminées. De plus, soit un arc $\mu_0\mu_1$ de la géodésique Γ qui soit contenu dans le domaine Δ ; tout élément linéaire ds de la surface qui s'appuie sur l'arc $\mu_0\mu_1$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

les variables u et v restant finies et la fonction $G(u, v)$ ne s'annulant jamais dans le domaine Δ , où elle reste d'ailleurs finie et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres.

III. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Si une surface est régulière autour de la géodésique OM_0M_1 parcourue dans le sens où l'on rencontre consécutivement les trois points O , M_0 , M_1 , et si on lance un mobile en la position initiale M_0 avec une vitesse tangente à cette géodésique et dans le sens M_0M_1 , puis qu'on soumette le mobile à une force F finie et continue dans le domaine D , on aura pu choisir la grandeur V_0 de la vitesse initiale assez grande pour que l'arc M_0M_1 de géodésique pris dans sa totalité diffère aussi peu qu'on voudra de la trajectoire du mobile parcourue durant un temps égal à celui qu'un mobile libre sur la surface et lancé avec la même vitesse initiale mettrait à parcourir l'arc géodésique M_0M_1 .

Étudions d'abord le mouvement du mobile en prenant des coordonnées polaires de pôle O ; soient u et v les coordonnées polaires d'un point de la trajectoire. Tout élément linéaire appuyé en ce point aura la forme (1), où nous supposons que la ligne géodésique OM_0M_1 ait pour équation $v = 0$. Posons alors

$$(2) \quad \begin{cases} u = V_0 t + \xi + u_0, & (u_0 = \text{arc } OM_0 \text{ sur la géodésique}), \\ v = \eta, \end{cases}$$

Si le travail virtuel de la force F est représenté par l'expression $Q_u \delta u + Q_v \delta v$, les équations du mouvement seront

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\xi'}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \eta'^2 + Q_u, \\ \frac{d\eta'}{dt} = \frac{-\eta' \left(\frac{\partial G}{\partial u} \xi' + \frac{\partial G}{\partial v} \eta' \right)}{G} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u} \eta'^2 + \frac{Q_v}{G} - \frac{\eta'}{G} \frac{\partial G}{\partial u} V_0, \\ \frac{d\xi}{dt} = \xi', \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta'. \end{cases}$$

Conditions initiales : $\xi_{(0)} = \xi'_{(0)} = v_0 = v'_0 = 0$.

Prolongeons un peu l'arc M_0M_1 en M_2 et soit A l'arc M_0M_2 , soit b une quantité positive que nous ferons tendre ultérieurement vers zéro et de l'ordre de $\frac{1}{V_0}$.

Lorsque les variables ξ, τ, ξ', τ' sont toutes moindres que b et que t positif est moindre que la quantité positive $\frac{\Lambda - b}{V_0}$, nous pourrons prendre, comme limite supérieure des modules des seconds membres des équations (3), une expression M de la forme

$$M = KV_0 b + P,$$

du moins lorsque V_0 est suffisamment grand, K et P désignant deux nombres positifs définis par les domaines Ω, Δ, D . Soit alors T la plus petite des quantités

$$\frac{\Lambda - b}{V_0}, \quad \frac{b}{M}$$

et supposons enfin que les composantes Q_u, Q_v admettent des dérivées partielles du premier ordre, continues dans le domaine Δ .

La méthode des approximations successives de M. Picard, modifiée par M. Lindelöf, nous apprend que les intégrales du système (3) seront pour $t < T$ toutes moindres que b .

Ici, on distinguera deux cas :

Premier cas : $\Lambda < \frac{1}{K}$. Alors, en posant $\frac{P}{b} = \left(\frac{1}{\Lambda} - K\right) V_0$, on voit qu'en faisant grandir indéfiniment V_0 , la trajectoire réelle diffère aussi peu qu'on veut de l'arc $M_0 M_2$ et à plus forte raison de l'arc $M_0 M_1$.

Deuxième cas : $\Lambda \geq \frac{1}{K}$. Soit N la partie entière du rapport $\Lambda : \frac{1}{K}$, j'envisage un domaine Θ compris dans le domaine Δ , domaine limité par les géodésiques $v = -\beta, v = \beta$; et, par les courbes $u = u_0, u = \Lambda + u_0 \equiv u_2$.

L'arc $M_0 M_2$ sera comme le diamètre de ce trapèze.

Je partagerai ce trapèze en $(2N + 1)$ autres trapèzes par $2N$ valeurs de u équidistantes de u_0 et de u_2 et je partagerai la durée $\frac{\Lambda}{V_0}$ en $(2N + 1)$ durées partielles égales.

Le premier arc de la trajectoire correspondant à cette première durée rentre évidemment dans le premier cas; pour étudier le second arc, on prendra *provisoirement* des coordonnées polaires dont le pôle O' est la projection géodésique de O sur la tangente

géodésique à l'extrémité α_1 du premier arc de la trajectoire, et ainsi de suite.

Les propriétés des triangles géodésiques permettent aisément de *raccorder* ces divers systèmes de coordonnées, à l'aide desquelles chaque arc partiel rentrera dans le premier cas pourvu que b soit suffisamment petit [on prendra $(2N + 1)b$ notablement plus petit que β].

En revenant aux coordonnées fixes u et v , et faisant tendre β vers zéro, et désignant par (β) une petite quantité de l'ordre de β , on voit qu'à tous les instants compris entre les époques 0 et $\frac{A}{V_0}$, sauf peut-être aux époques $\frac{A}{V_0}[1 - (\beta)]$, les écarts entre les coordonnées du mobile sur lequel agit la force et les coordonnées du mobile libre qui partirait de M_0 avec la même vitesse *initiale* sont eux-mêmes de l'ordre de β .

Le théorème énoncé est donc démontré, sinon pour l'arc OM_2 , du moins pour l'arc OM_1 qui y est contenu.

IV. Au théorème précédent je rattacherai des considérations qui touchent d'assez près la question de la stabilité.

Considérons sur une surface un domaine Δ limité par un contour simple. Nous dirons que le domaine est *ouvert*, si ce domaine ne contient aucune géodésique qui y serait fermée et si l'on peut assigner un maximum aux arcs géodésiques qui traversent Δ .

Nous dirons encore que le domaine Δ est *régulier* s'il est compris dans un domaine D dans lequel nous puissions tracer un domaine Ω qui entoure Δ , de manière que les conditions énoncées au paragraphe II soient satisfaites.

La remarque que j'avais en vue peut alors s'énoncer ainsi :

Si un mobile soumis à une force finie et assujéti à demeurer sur une surface demeure confiné sur un domaine D régulier et ouvert, l'énergie cinétique du mobile restera nécessairement limitée.

La force, bien entendu, est fonction de la position du mobile, mais ne dérive pas d'une fonction des forces; car, dans ce cas, la remarque serait sans intérêt.

SUR LE THÉORÈME DES AIRES;

Par M. P. APPELL.

1. Imaginons un système sollicité par des forces extérieures telles que la somme de leurs moments par rapport à un axe fixe Oz soit nulle. Alors, si le système part du repos, la somme $\Sigma m r^2 \frac{d\theta}{dt}$ reste nulle. Mais, malgré cette condition, si le système n'est pas rigide, il peut, par des déformations successives et sans subir de torsions, partir d'une configuration déterminée et revenir à une configuration identique, déduite de la première par une rotation autour de Oz . Je me propose d'abord d'en indiquer un exemple élémentaire au point de vue de l'enseignement, en renvoyant, pour des considérations générales, à des Notes de MM. Guyou et Maurice Lévy (*Comptes rendus*, 29 octobre 1894).

Soient une roue homogène, de centre O , mobile sans frottement sur un plan horizontal, $A_0A'_0$ un diamètre invariablement lié à la roue. Aux points A_0, A'_0 sont placés sur la roue deux ouvriers de même masse m et aux points C_0, C'_0 situés sur le même diamètre, à égale distance de part et d'autre du centre O , sont placés deux autres ouvriers de masse μ . Le système est immobile. Cela posé, les ouvriers font la manœuvre suivante, composée de quatre phases :

1° Les ouvriers m se mettent à marcher sur la circonférence, dans le même sens de rotation, autour du centre en restant diamétralement opposés; ils s'arrêtent après avoir parcouru un quart de la circonférence de la roue : celle-ci tourne alors en sens contraire d'un angle α , puis s'arrête.

2° Les ouvriers μ se réunissent au centre : la roue ne bouge pas; mais le moment d'inertie par rapport à Oz diminue.

3° Les ouvriers m reviennent alors à leurs positions primitives sur la roue : celle-ci tourne en sens contraire de sa rotation précédente d'un angle différent β , puis s'arrête.

4° Les ouvriers μ se séparent et viennent occuper leurs positions primitives sur la roue, opération qui laisse la roue immobile.

Après ces mouvements, le système a repris la même configura-

tion, mais a tourné d'un certain angle $\beta - \alpha$. En les recommençant, les ouvriers arriveront donc à faire tourner le système d'un angle supérieur à tout angle donné.

Si l'on appelle a le rayon de la roue, Mk^2 son moment d'inertie, c la distance de C_0 au centre, on a dans la première phase

$$2ma^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - (Mk^2 + 2\mu c^2)\alpha = 0$$

et dans la troisième, puisque c est alors nul,

$$2ma^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) - Mk^2\beta = 0.$$

On voit donc que β est supérieur à α et l'on peut calculer $\beta - \alpha$.

II. Voici maintenant une remarque générale permettant de ramener à un même type tous les problèmes du genre de celui qui précède. J'ai indiqué sommairement cette remarque dans une Note des *Comptes rendus* (5 novembre 1894).

Soient un corps solide, mobile autour d'un axe fixe Oz , et des points de masses $m_1, m_2, \dots$ liés en quelque manière au corps solide et animés par rapport à ce corps de mouvements prescrits à l'avance; si donc on appelle $r_1, \theta_1, z_1; r_2, \theta_2, z_2; \dots$ les coordonnées semi-polaires des points $m_1, m_2, \dots$, par rapport à des axes Ox, Oy, Oz liés au corps solide, ces coordonnées sont des fonctions du temps données à l'avance. Supposons enfin que la somme N des moments des forces extérieures appliquées au système, par rapport à l'axe de rotation Oz , dépende uniquement de la position du corps solide et non des positions des points $m_1, m_2, \dots$ sur le corps.

Soit φ l'angle dont le corps a tourné, à partir d'une certaine position initiale, par exemple l'angle de Ox avec un axe fixe OX perpendiculaire à Oz , I son moment d'inertie par rapport à Oz : la somme des moments des quantités de mouvement des points du corps solide par rapport à Oz est $I \frac{d\varphi}{dt}$. D'autre part, les coordonnées semi-polaires absolues des points $m_1, m_2, \dots$, par rapport aux axes fixes Oz, OX et à un axe perpendiculaire OY , sont $r_1, \theta_1 + \varphi, z_1; r_2, \theta_2 + \varphi, z_2; \dots$; donc la somme des moments

de leurs quantités de mouvement absolues, par rapport à Oz , est

$$m_1 r_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) + m_2 r_2^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \right) + \dots$$

ou

$$\sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \sum m r^2.$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué au système total donne donc

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \left(\sum m r^2 + 1 \right) \right] = N,$$

équation qui donne φ en fonction de t , puisque N est supposé fonction de φ seul et que les r et les θ sont des fonctions données de t .

Cela posé, considérons un point ayant pour masse $M = \sum m$ et pour coordonnées semi-polaires R , Θ et Z , par rapport aux axes $Oxyz$ liés au corps solide, les quantités définies par les équations

$$(2) \quad MR^2 = \sum m r^2, \quad MR^2 d\Theta = \sum m r^2 d\theta, \quad MZ = \sum m z.$$

Comme $r_1, r_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ sont des fonctions connues de t , R , Θ et Z seront aussi des fonctions connues de t , et le point M ainsi défini sera animé d'un mouvement connu dans le corps. Si l'on remplace tous les points $m_1, m_2, \dots$ par ce seul point M , en admettant que cette substitution n'altère pas la somme N des moments des forces par rapport à Oz , le mouvement du corps n'est pas changé. En effet, l'équation du nouveau mouvement est

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left[MR^2 \frac{d\Theta}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} (R^2 + 1) \right] = N,$$

identique à l'équation (1), en vertu des relations (2). On voit que la valeur Z ne joue ici aucun rôle; aussi pourrait-on la prendre arbitrairement en fonction de t , au lieu de la définir par la troisième des équations (2).

III. Voici quelques propriétés du point M ainsi défini. Imaginons un système d'axes $Oxyz$ et des points $m_1, m_2, \dots$ de coor-

données semi-polaires $r_1, \theta_1, z_1; r_2, \theta_2, z_2; \dots$, animés de mouvements connus; appelons *centre d'inertie* de ces points par rapport à l'axe Oz le point mobile de masse M dont les coordonnées semi-polaires R, Θ, Z sont définies en fonction de t par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} M = \sum m, & MR^2 = \sum m r^2, \\ MR^2 d\Theta = \sum m r^2 d\theta, & MZ = \sum m z; \end{cases}$$

L'angle polaire de ce point n'est déterminé qu'à une constante près; nous supposons, pour fixer les idées, que tous les θ s'annulent pour $t = 0$ et qu'il en soit de même de Θ . Nous voyons alors que ce point possède des propriétés analogues à celles du centre de gravité. Ainsi, la position du centre d'inertie de tous les points, au temps t , n'est pas changée, si l'on remplace d'abord quelques-uns des points par leur centre d'inertie.

On peut alors énoncer le résultat précédent en disant que :

Si, dans le problème général du n° II, l'on remplace plusieurs points $m_1, m_2, \dots$ par leur centre d'inertie par rapport à Oz , ce point étant calculé dans le mouvement relatif par rapport au solide, le mouvement du reste du système n'est pas altéré, pourvu que cette substitution n'altère pas N .

Par exemple, si l'axe Oz est vertical et si les seules forces extérieures sont des poids, $N = 0$, avant et après la substitution.

IV. Appliquons d'abord ces considérations à l'exemple 1. Remplaçons les deux points m et μ , primitivement placés en A_0 et C_0 , par leur centre d'inertie M . En appelant r et θ les coordonnées polaires de m par rapport à la plaque, l'axe polaire étant OA_0 , et r_1, θ_1 celles de μ , on a, pour le centre d'inertie M ,

$$M = m + \mu, \quad MR^2 = m r^2 + \mu r_1^2, \quad MR^2 d\theta = m r^2 d\theta + \mu r_1^2 d\theta_1.$$

Voyons quel est le mouvement de ce point sur la roue. Dans la première phase, $r = 0, r_1 = c, \theta_1 = 0, \theta$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Donc

M décrit un arc de cercle de centre O , de rayon $\sqrt{\frac{m a^2 + \mu c^2}{m + \mu}}$,

et d'angle au centre $\lambda = \frac{ma^2}{ma^2 + \mu c^2} \cdot \frac{\pi}{2}$. Dans la deuxième phase, $r = a$, r_1 varie de c à 0, θ est égal à λ et θ_1 à 0. Donc Θ reste constant et égal à λ , R diminue jusqu'à $\sqrt{\frac{ma^2}{m + \mu}}$; le centre d'inertie M décrit une portion de rayon. Dans la troisième phase, R reste constant, r est égal à a , r_1 à 0, $d\theta_1$ est nul, θ diminue de $\frac{\pi}{2}$ à 0; donc Θ diminue de λ à 0. Enfin, dans la quatrième phase, Θ est nul, R augmente de $\sqrt{\frac{ma^2}{m + \mu}}$ à $\sqrt{\frac{ma^2 + \mu c^2}{m + \mu}}$.

En définitive, le point M décrit une courbe fermée composée de deux portions de rayons de la roue et de deux arcs de cercle concentriques à la roue.

On peut de même remplacer les deux ouvriers symétriques m et μ placés primitivement en A'_0 et C'_0 par un point M' de même masse que M symétrique de M par rapport au centre. Le mouvement de la roue est le même sous l'action de ces deux points M et M' que sous l'action des quatre points primitifs.

Si la roue était assujettie à tourner autour d'un axe vertical fixe réalisé matériellement, il n'y aurait plus à se préoccuper de la symétrie des points qui a pour but de maintenir le centre de gravité fixe; on pourrait alors remplacer les quatre points par leur centre d'inertie, c'est-à-dire par un seul point décrivant une courbe fermée sur la roue. On vérifiera facilement que cette courbe est homothétique, par rapport au centre O , de celle que décrit le point M .

V. Imaginons un observateur tombant verticalement dans le vide et supposons qu'il veuille tourner autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité. Il pourra faire jouer à ses bras étendus symétriquement le rôle des ouvriers m dans la roue I et à ses jambes, plus ou moins écartées, celui des ouvriers μ .

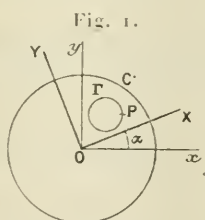
Dans ces conditions, le mouvement du tronc regardé comme rigide sera le même que si le mouvement de chaque bras et de chaque jambe était remplacé par celui de son centre d'inertie par rapport à l'axe vertical mené par le centre de gravité. L'identité est donc complète entre cette question et le problème élémentaire résolu dans le n° I.

On pourrait même remplacer le mouvement du bras et de la jambe droits par celui de leur centre d'inertie, et le mouvement des membres symétriques par celui de leur centre d'inertie symétrique du premier. On aurait ainsi un système analogue au système IV et à celui que MM. Marcel Deprez et Picard ont construit. (Voyez *Comptes rendus*, 5 novembre 1894.)

SUR LA ROTATION D'UN SYSTÈME DÉFORMABLE;

Par M. ÉMILE PICARD.

A la suite des expériences de M. Marey sur la chute d'un chat, la question de la rotation d'un système déformable s'est trouvée mise à l'étude. Il était intéressant de donner un exemple *d'un système, partant du repos, pouvant, par le seul travail des forces intérieures, tourner d'un angle quelconque autour de son centre de gravité, tous ses points se retrouvant à la fin de la rotation dans les positions relatives qu'ils occupaient primitivement*. Parmi les exemples très nombreux que l'on peut citer, il n'y en a point, ce me semble, de plus simple que celui que je communiquai à M. Marcel Deprez et d'où il déduisit un petit appareil qu'il fit fonctionner récemment devant l'Académie ⁽¹⁾.



Considérons un disque matériel C, mobile autour d'un axe vertical O. Sur le disque C on a tracé une courbe fermée Γ . Un point matériel P est placé en un point de Γ et tout le système est pri-

⁽¹⁾ MARCEL DEPREZ. *Sur un appareil servant à mettre en évidence certaines conséquences du théorème des aires* (*Comptes rendus*, 5 novembre 1894). Voir aussi, dans le numéro précédent des *Comptes rendus*, deux Communications de M. GUYOU et de M. MAURICE LÉVY. On trouvera aussi un article de M. APPELL dans le numéro du 5 novembre.

mitivement en repos. Supposons maintenant que le point P se meuve sur Γ suivant une loi arbitrairement donnée, de façon à revenir à sa position initiale après avoir décrit la courbe Γ tout entière; à ce moment, le disque C aura tourné d'un certain angle, et les différentes parties du système formé par le disque et le point matériel auront repris leurs mêmes positions relatives. Nous avons donc là un exemple du phénomène cherché.

Proposons-nous de trouver l'expression de l'angle dont a tourné le système. Nous représenterons par OX et OY deux axes rectangulaires invariablement liés au disque C et à la courbe Γ , et nous désignerons par Ox et Oy deux axes fixes dans le plan horizontal. Les deux coordonnées X et Y du point P seront des fonctions données du temps correspondant au déplacement de P sur Γ . Si α désigne l'angle xOX , nous aurons, en appliquant le théorème des aires et tenant compte de ce qu'au début le système est au repos,

$$MK^2 \frac{d\alpha}{dt} + m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

où MK^2 désigne le moment d'inertie du disque par rapport à O; m représente la masse de P, et l'on a

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient de suite

$$[MK^2 + m(X^2 + Y^2)] \frac{d\alpha}{dt} + m \left(X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} \right) = 0,$$

ou encore

$$d\alpha = -m \frac{X dY - Y dX}{MK^2 + m(X^2 + Y^2)}$$

et, par suite, on aura pour l'angle total Ω dont a tourné le disque

$$\Omega = -m \int_{\Gamma} \frac{X dY - Y dX}{MK^2 + m(X^2 + Y^2)},$$

l'intégrale qui figure dans le second membre étant une intégrale curviligne prise le long de la courbe Γ .

Un cas particulièrement simple sera celui où Γ se composerait

d'un arc de cercle AB de centre O et des deux rayons OA et OB. Si R désigne le rayon de l'arc AB et ω l'ouverture de son angle au centre, on aura, d'après la formule précédente et en supposant AB parcouru dans le sens de OX vers OY,

$$\Omega = - \frac{m R^2}{M K^2 + m R^2} \omega.$$

Afin d'éviter d'avoir un axe vertical rigide qui pratiquement aurait toujours quelque frottement dans ses supports, M. Marcel Deprez associe à la courbe Γ une seconde courbe Γ' symétrique de la première par rapport au point O et sur laquelle se meut un point P' symétrique de P. Le centre de gravité de tout le système est alors toujours au point O et il suffit d'employer, comme axe de rotation, un fil sans torsion.

On peut donner, théoriquement au moins, une autre forme à l'expérience précédente. Imaginons un homme debout sur un plan parfaitement poli et ayant les pieds en O; il étend les bras et fait décrire à ses mains deux courbes Γ et Γ' dans un plan horizontal, de la même façon que P et P' décrivaient précédemment leurs courbes respectives. Notre individu pourra, de cette manière, prendre un mouvement continu de rotation.

ABaque EN POINTS ISOPLÈTHES DE L'ÉQUATION DE KÉPLER;

Par M. M. D'OCAGNE.

1. Si l'on met l'équation de Képler

$$(1) \quad u - e \sin u = nt$$

sous la forme

$$\frac{1}{n} u - \frac{1}{n} e \sin u = t,$$

elle rentre dans le type général envisagé dans les §§ 2 et 3 de ma Note sur l'*Abaque général de la Trigonométrie sphérique* ⁽¹⁾.

Appliquant les formules (3), (4) et (5) données à l'endroit cité,

(¹) *Bulletin astronomique*, p. 5; 1894.

on voit donc que l'équation est représentable par un abaque ainsi constitué :

1° Le système de points simplement isoplèthes (t) défini par

$$(2) \quad x = t, \quad y = 0;$$

2° Le système de points simplement isoplèthes (e) défini par

$$(3) \quad x = e, \quad y = 1;$$

3° Le système de points doublement isoplèthes (u, n) défini par

$$(4) \quad x = \frac{u}{n + \sin u}, \quad y = \frac{\sin u}{n + \sin u}.$$

Pour avoir les isoplèthes (u) et (n), formant par leur ensemble ce dernier système, éliminons d'abord n entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$(5) \quad y = \frac{\sin u}{u} x.$$

Les isoplèthes (u) sont donc des droites passant par l'origine.

Pour éliminer maintenant u , écrivons ces deux équations

$$nx + x \sin u = u, \quad ny + (y - 1) \sin u = 0,$$

et ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par $(1 - y)$ et x , ce qui donne

$$nx = u(1 - y).$$

Portant la valeur de u tirée de là dans la seconde des équations précédentes, on obtient pour les isoplèthes (n) l'équation

$$(6) \quad ny + (y - 1) \sin \frac{nx}{1 - y} = 0.$$

Les équations (2), (3), (5) et (6) définissent complètement l'abaque demandé.

J'ai tenu à signaler cette solution, *théoriquement* la plus satisfaisante, pour montrer un nouvel exemple d'application du principe qui m'a servi à construire l'abaque général de la Trigonométrie sphérique. Mais il vaut mieux, *en pratique*, éviter le tracé des courbes (n) définies par l'équation (6), en adoptant la solution suivante.

2. Posant $nt = \theta$, considérons l'équation sous la forme

$$u - e \sin u = \theta.$$

Écrivons-la

$$\theta + e \sin u - u = 0$$

et prenons θ et e pour des coordonnées parallèles de droite, U et V.

Nous aurons alors pour premiers systèmes d'isoplèthes (θ) et (e) les points

$$(7) \quad U = \theta \quad \text{et} \quad V = e,$$

constituant des graduations naturelles respectivement sur l'axe des U et sur l'axe des V.

Le troisième système d'isoplèthes (u) sera dès lors donné par l'équation

$$U + V \sin u - u = 0,$$

qui représente, pour chaque valeur de u , un point dont les coordonnées, rapportées à un axe des x confondu avec l'axe des origines et à un axe des y équidistant de ceux des U et des V, sont, en représentant par $2a$ l'écartement de ces deux derniers (¹),

$$(8) \quad x = -a \frac{1 - \sin u}{1 + \sin u}, \quad y = \frac{u}{1 + \sin u}.$$

Les formules (7) et (8) définissent complètement notre nouvel abaque.

3. Ici se place une première remarque importante au point de vue de la construction de l'abaque.

La variable u croît de 0 à 2π . Or, lorsqu'elle croît de 0 à π , x reste compris entre $-a$ et 0; mais, lorsqu'elle croît de π à 2π , x devient infini pour $u = \frac{3\pi}{2}$. Les points isoplèthes (u) s'étendraient donc jusqu'à l'infini, ce qui est *pratiquement* inacceptable. Afin d'éviter cet inconvénient majeur, j'aurai recours à l'artifice que j'ai déjà employé dans mon livre pour l'abaque de la distance sphérique (²).

Pour les valeurs de u supérieures à π , posons

$$(9) \quad U = \theta, \quad V = -e.$$

(¹) *Nomographie*, p. 53.

(²) *Nomographie*. Note au bas de la page 84.

Il vient alors pour les points isoplèthes (u) l'équation

$$U - V \sin u - u = 0,$$

qui donne, en coordonnées cartésiennes,

$$(10) \quad x = -u \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}, \quad y = \frac{u}{1 - \sin u}.$$

Cette nouvelle valeur de x reste finie lorsque u varie de π à 2π . De cette façon, tous les points isoplèthes (u) sont à distance finie. Seulement à la variable e correspondent deux graduations : l'une, portée dans le sens positif, sert lorsque $u < \pi$, c'est-à-dire $\theta < \pi$; l'autre, portée dans le sens négatif, lorsque $u > \pi$ ou $\theta > \pi$.

4. Voici maintenant, à propos de la construction de l'abaque, une autre remarque non moins importante au point de vue *pratique*.

Tandis que la variable θ varie de 0 à $2\pi = 6,283, \dots$, la variable e reste comprise entre 0,01 et 0,4. Cela conduirait à avoir sur l'axe des U une échelle seize fois plus développée environ que celle qui serait portée par l'axe des V .

Pour obvier à cet inconvénient, posons $e = \frac{e'}{10}$ et construisons l'abaque de l'équation

$$u - e' \frac{\sin u}{10} = \theta,$$

défini, d'après ce qui précède, par les formules

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \theta, \\ x = -u \frac{10 - \sin u}{10 + \sin u}, \end{array} \quad \begin{array}{l} V = e' \\ y = \frac{10u}{10 + \sin u} \end{array} \right\} \text{ pour } u < \pi,$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \theta, \\ x = -u \frac{10 + \sin u}{10 - \sin u}, \end{array} \quad \begin{array}{l} V = -e' \\ y = \frac{10u}{10 - \sin u} \end{array} \right\} \text{ pour } u > \pi;$$

puis, cet abaque une fois construit, graduons l'échelle des points (e') au moyen des valeurs correspondantes de e .

On peut remarquer qu'ici la transformation employée précédemment pour éviter les points à l'infini et qui a donné naissance aux formules du second groupe n'est plus nécessaire, puisque le dénominateur des valeurs de x et de y dans le premier groupe ne peut plus s'annuler.

Il vaut mieux néanmoins continuer à en faire usage pour la raison que voici : la valeur de l'inconnue u est donnée par le point où la droite qui joint le point coté θ au point coté e coupe la courbe graduée au moyen des valeurs de u . Au point de vue de la précision, il est préférable que ce point de rencontre se trouve *entre* les points servant à déterminer la droite indicatrice de la lecture. Or, la transformation susmentionnée a précisément pour effet de faire rentrer tous les points (u) entre l'axe des U et l'axe des V .

5. Pour obtenir l'abaque en points simplement isoplèthes qui vient d'être décrit, nous avons dû prendre le produit nt pour un argument que nous avons appelé θ ; mais rien n'est plus facile que d'éviter de faire ce produit en complétant l'abaque de la façon suivante. Formons l'abaque du produit

$$\theta = nt$$

en posant

$$U = \theta, \quad V = -n,$$

ce qui donne pour isoplèthes (t)

$$U + tV = 0,$$

ou

$$x = a \frac{t-1}{t+1}, \quad y = 0.$$

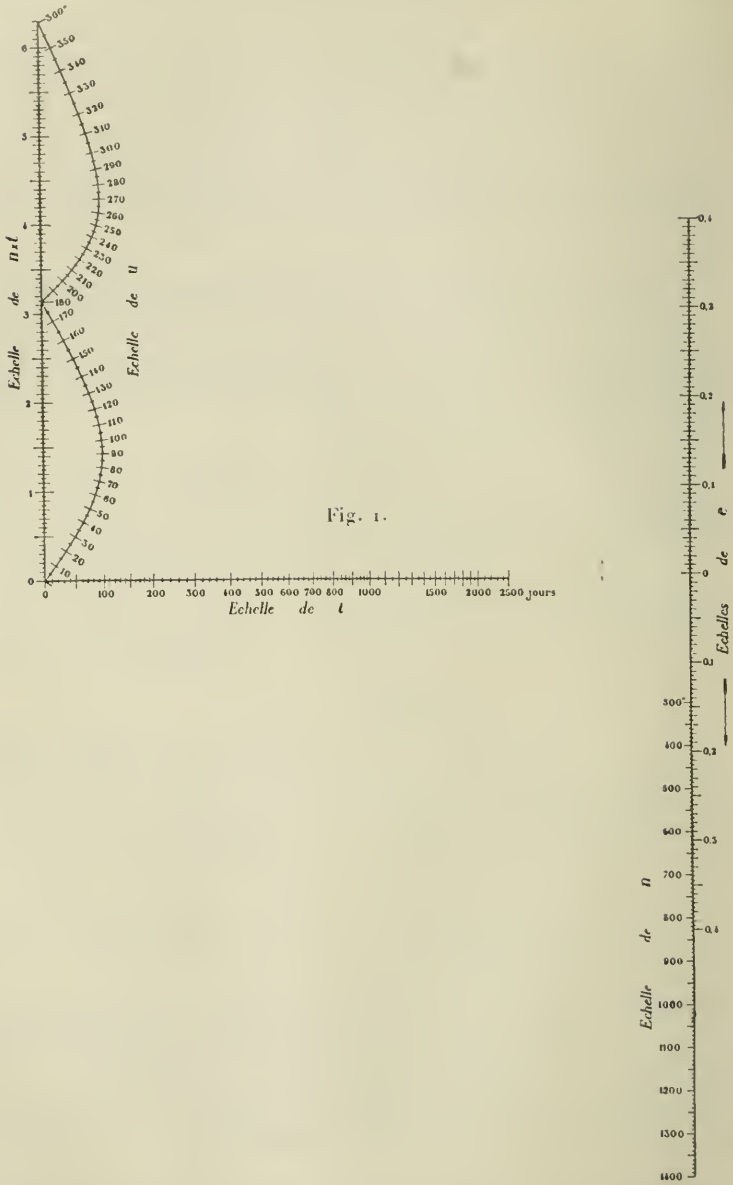
Comme n reste compris entre 0,0025 et 0,006, tandis que t varie de 0 à 2500, nous coterons encore ici, *pour la construction de l'abaque*, les variables $t' = \frac{t}{1000}$ et $n' = 1000n$ aux variables t et n , et nous coterons les points (t') et (n') respectivement au moyen des valeurs de t et de n , ces dernières étant même, pour plus de commodité, exprimées en secondes.

L'abaque complémentaire ainsi construit peut, sans nul inconvénient, être superposé au premier, les échelles (θ) de l'un et de l'autre, qui sont semblables, étant mises en coïncidence.

C'est de cette façon qu'a été obtenu l'abaque représenté par la fig. 1. Son mode d'emploi peut se résumer ainsi :

Une droite (trait sur un transparent ou fil tendu) passant par le point coté n sur l'échelle verticale de droite est amenée

à passer par le point coté t sur l'échelle horizontale. On la fait



ensuite pivoter autour du point u où elle coupe l'échelle verti-

cale de gauche, jusqu'à ce qu'elle passe par le point coté e sur l'échelle verticale de droite, dans sa partie supérieure si le point θ est sous l'arc inférieur de la courbe, dans sa partie inférieure si le point θ est sous l'arc supérieur. On n'a plus qu'à lire la cote du point où cette courbe est alors coupée par la droite.

6. Si l'on ne tient pas à effectuer le produit $\theta = nt$ sur l'abaque même, c'est-à-dire si l'on conserve θ comme entrée, on peut réduire notablement encore le Tableau de la manière suivante :

Considérons la seconde partie de l'abaque, celle qui correspond aux valeurs de u supérieures à π . Elle comprend l'échelle inférieure de droite pour la variable e , la moitié supérieure de l'échelle de gauche pour la variable θ , la courbe supérieure pour la variable u .

Supposons menée la droite qui joint le point coté 0 de l'échelle de droite au point coté π de l'échelle de gauche, et prenons la figure symétrique oblique de l'ensemble qui vient d'être définie par rapport à cette droite, la symétrie ayant lieu parallèlement aux axes des U et des V .

Dans ces conditions, l'échelle inférieure de e vient coïncider exactement avec l'échelle supérieure de la même variable; la partie supérieure (de π à 2π) de l'échelle de θ se rabat sur la partie inférieure (de 0 à π), le point de cote θ_0 venant en coïncidence avec celui de cote $2\pi - \theta_0$. Je dis qu'il en est de même pour l'échelle curviligne correspondant à u .

Soient, en effet, les valeurs $u_0 < \pi$ et $2\pi - u_0 > \pi$. Les formules (11) donnent pour le point (u_0) les coordonnées

$$x_0 = -a \frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0}, \quad y_0 = \frac{10 u_0}{10 + \sin u_0},$$

et les formules (12), pour le point ($2\pi - u_0$),

$$x_1 = -a \frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0}, \quad y_1 = \frac{10(2\pi - u_0)}{10 + \sin u_0}.$$

Ces deux points, ayant même abscisse, sont sur une parallèle aux axes des U et des V . D'autre part, le point milieu de leur intervalle a pour ordonnée

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{10\pi}{10 + \sin u_0}.$$

Son abscisse étant

$$x = -a \frac{10 - \sin u_0}{10 + \sin u_0},$$

on voit, par l'élimination de $\sin u_0$, qu'il se trouve sur la droite

$$\pi x + 2ay = a\pi,$$

qui est celle joignant le point $e = 0 (x = a, y = 0)$ au point $\eta = \pi (x = -a, y = \pi)$.

La transformation indiquée a donc bien pour effet d'amener le point de cote $2\pi - u_0$ en coïncidence avec le point de cote u_0 .

L'abaque se trouve ainsi réduit à la *fig. 2*.

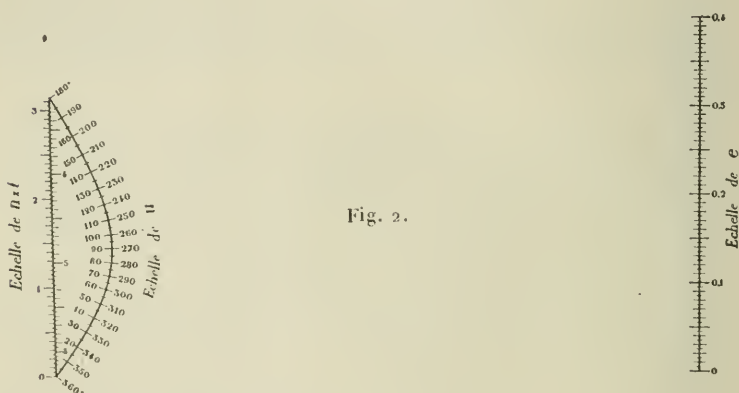


Fig. 2.

Son emploi consiste simplement en ceci :

Joindre par une droite le point coté e sur l'échelle de droite au point coté η sur l'échelle de gauche. Suivant que η est plus petit ou plus grand que π , lire, au point où cette droite coupe l'échelle curviligne, la valeur de u plus petite ou plus grande que π .

Il est bien évident que pour obtenir, avec un tel abaque, le degré de précision requis par les besoins de l'Astronomie, il serait nécessaire de lui donner des dimensions qui rendraient son emploi peu pratique. Il permettra en tout cas d'obtenir rapidement une valeur approchée de l'inconnue, et supprimera ainsi tout tâtonnement dans l'application des méthodes connues d'approximation.

SUR L'ÉQUATION D'EULER
ET SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

Par M. PAUL ADAM.

L'équation d'Euler s'est présentée dans diverses questions de Géométrie qui ont permis d'en donner des solutions *géométriques*.

Lagrange, par exemple, a intégré cette équation en partant du triangle sphérique; Jacobi, par la considération d'un système de deux cercles, en a fait connaître la solution sous une forme trigonométrique très simple; plus récemment, M. Darboux ⁽¹⁾ a obtenu une forme géométrique nouvelle pour l'intégrale de l'équation d'Euler en prenant une famille d'ovales de Descartes ayant les trois mêmes foyers; M. Darboux a donné en même temps une nouvelle méthode très ingénieuse pour l'intégration de cette équation différentielle par l'analyse.

Je vais indiquer, dans cette Note, un autre procédé d'intégration géométrique de l'équation d'Euler par les lignes de courbure de l'ellipsoïde, et faire connaître une propriété remarquable des lignes de courbure d'une famille d'ellipsoïdes convenablement choisie.

En prenant, pour les coordonnées curvilignes d'une surface réelle, les paramètres imaginaires conjugués α et β des génératrices rectilignes de la sphère, dans la représentation sphérique faite à la manière de Gauss, cette surface a pour équation tangentielle

$$(\alpha + \beta)X + i(\beta - \alpha)Y + (\alpha\beta - 1)Z + \xi = 0,$$

ξ désignant une certaine fonction de α et de β , et ses lignes de courbure sont définies par l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2} d\beta^2.$$

S'il s'agit de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

(1) *Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques (Annales de l'École Normale, 1^{re} série, t. IV ; 1867).*

la fonction ξ et les coordonnées x, y, z de la surface se calculent, en fonction de α et de β , au moyen des équations

$$\frac{\alpha + \beta}{\frac{x}{a^2}} = \frac{i(\beta - \alpha)}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\alpha\beta - 1}{\frac{z}{c^2}} = -\xi,$$

et il vient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{a^2(\alpha + \beta)^2 - b^2(\beta - \alpha)^2 + c^2(\alpha\beta - 1)^2}, \\ x^2, y^2, z^2 = \frac{a^4(\alpha + \beta)^2, -b^4(\beta - \alpha)^2, c^4(\alpha\beta - 1)^2}{\xi^2}. \end{array} \right.$$

En faisant l'hypothèse habituelle $a > b > c$, et en posant

$$(3) \quad \frac{a^2(b^2 - c^2) + b^2(a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)} = m^2,$$

m^2 étant une quantité supérieure à l'unité, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, on trouve, d'après l'équation (1), que les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont définies, dans le système (α, β) , par l'équation

$$(4) \quad \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^4 - 2m^2\alpha^2 + 1}} = \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^4 - 2m^2\beta^2 + 1}}.$$

Appelons j et k les deux racines réelles et positives du trinôme $t^2 - 2m^2t + 1$, j étant la plus grande, de sorte que

$$j = m^2 + \sqrt{m^4 - 1}, \quad k = m^2 - \sqrt{m^4 - 1};$$

il suffit de poser

$$\alpha = x\sqrt{k}, \quad \beta = y\sqrt{k},$$

pour ramener l'équation (4) à la forme que lui a donnée Euler

$$(5) \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

D'après cela, si l'on possède, sous forme finie, entre x et y , l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde, cette équation sera l'intégrale de (5).

Or les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont situées sur les

surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0 ;$$

en vertu des relations (2), α et β doivent donc vérifier, le long de ces lignes de courbure, l'équation

$$(6) \quad \frac{a^2(\alpha + \beta)^2}{a^2 + \lambda} - \frac{b^2(\beta - \alpha)^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2(\alpha\beta - 1)^2}{c^2 + \lambda} = 0,$$

de sorte que l'intégrale de l'équation (5) d'Euler revêt la forme *nouvelle* suivante :

$$(7) \quad \frac{a^2 k(x + y)^2}{a^2 + \lambda} - \frac{b^2 k(y - x)^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2(kxy - 1)^2}{c^2 + \lambda} = 0,$$

λ désignant la constante arbitraire.

Ce résultat (7) appelle de suite une remarque qui nous permettra tout à l'heure d'énoncer un théorème : (7) est l'intégrale de l'équation d'Euler *en donnant à a^2 , b^2 , c^2 des valeurs assujetties à la seule condition* (3), laquelle s'écrit, en introduisant k à la place de m ,

$$\frac{a^2(b^2 - c^2) + b^2(a^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)} = \frac{k^2 + 1}{2k},$$

ou encore

$$(8) \quad \frac{(1 - k)^2}{a^2} - \frac{(1 + k)^2}{b^2} + \frac{4k}{c^2} = 0;$$

l'équation (7) doit donc pouvoir être mise sous forme d'une constante arbitraire égale à une fonction ne dépendant que de x , y et k . Le calcul montre en effet que l'expression

$$\frac{1}{c^2(a^2 - b^2)} \left[\frac{2a^2b^2c^2}{\lambda} + c^2(a^2 + b^2) \right]$$

(qui n'est autre qu'une constante arbitraire) tirée de (7) ne contient que x , y et λ .

De même que l'équation (7), l'équation (6) ne contient au fond que α , β , k et une constante arbitraire μ , lorsque a^2 , b^2 et c^2 sont liés par la relation (8); cela veut dire que l'équation (6) constitue toujours la même relation entre α et β lorsque a^2 , b^2 et c^2 varient

en satisfaisant à (8), où k est regardé comme une constante.

Géométriquement, ce fait se traduit de la manière suivante : les plans tangents aux ellipsoïdes dont les axes sont liés par la relation (8), où k est une constante, sont parallèles quand on se déplace le long des lignes de courbure qui correspondent sur ces surfaces à une même valeur de μ .

On peut supposer que le grand axe $2a$ soit le même pour tous ces ellipsoïdes ; alors la relation (8) montre que si b décroît de a à zéro, il en est de même de c , de sorte qu'on obtient une famille d'ellipsoïdes intérieurs les uns aux autres, partant de la sphère de rayon a pour se réduire à leur grand axe commun :

Sur ces ellipsoïdes, les lignes de courbure se correspondent avec parallélisme des plans tangents.

Ce résultat est remarquable, car, si l'on se propose de chercher directement s'il existe une telle famille d'ellipsoïdes, les équations du problème ne montrent pas immédiatement la possibilité d'une solution.

Tous les résultats ci-dessus s'étendent évidemment aux deux hyperboloïdes.

Les deux paraboloides permettent aussi d'obtenir une forme nouvelle pour l'intégrale de l'équation d'Euler.

SUR UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION ET SUR LA RÉDUCTION DES SINGULARITÉS D'UNE COURBE ALGÈBRIQUE;

Par M. E. VESSIOT.

1. Il est naturel de chercher à généraliser la méthode de transformation des figures par projection, en prenant comme projetantes les droites d'une congruence quelconque. Si l'on veut de plus que par un point arbitraire ne passe qu'une seule projetante, cette congruence devra être du premier ordre ; et l'on obtiendra la plus simple ⁽¹⁾ de ces méthodes de projection, en employant une con-

⁽¹⁾ Il en existe évidemment une infinité ; on peut prendre, par exemple, pour projetantes les droites qui s'appuient sur une conique et une droite qui la rencontre, ou sur une cubique gauche et une de ses cordes.

gruence linéaire. C'est de cette méthode que nous voulons dire ici quelques mots; nous lui donnerons, pour abrégé, le nom de *projection* ou *perspective quadratique*. Elle correspond en effet, comme nous allons le montrer, à la transformation quadratique birationnelle des figures planes, de même que la projection conique, ou perspective linéaire, qui en est visiblement un cas singulier, correspond à la transformation homographique, ou linéaire, des figures planes.

Soit d'abord une congruence linéaire générale, c'est-à-dire ayant deux directrices rectilignes A et B, ne se rencontrant pas : et soient deux plans quelconques de l'espace, P et P'. Les droites de la congruence établissent une correspondance birationnelle ⁽¹⁾ entre les points de ces deux plans; je dis que cette correspondance est quadratique. Soit, en effet, D une droite du plan P, par exemple. Les projetantes des divers points de cette droite, dans notre perspective quadratique, engendrent la surface du second degré, qui contient A, B et D. La perspective de D est la section de cette quadrique par le plan P'; c'est donc une conique : la transformation est donc bien du second degré. Les *points principaux* sont, dans le plan P' par exemple, les points α' , β' , où A et B percent ce plan, et le point γ' où l'intersection Δ des deux plans est rencontrée par la droite qui joint les pieds α et β de A et de B dans le plan P. Ce sont de même dans le plan P les points α , β , et le point γ où la droite $\alpha'\beta'$ rencontre Δ . Enfin les points de Δ sont à eux-mêmes leurs homologues.

Dans le cas où l'une des directrices de la congruence, A par exemple, rencontre Δ , les quatre points α , γ , α' , γ' sont réunis en un seul ω . Alors les coniques C' qui correspondent, par exemple, aux droites D du plan P, passent en β' , en ω , et ont même tangente en ω ; car le plan (βA) est tangent en ω à toutes les quadriques lieux des projetantes des points des droites D, et sa trace $\omega T'$ sur le plan P' est, par suite, tangente à toutes les coniques C'.

Si A et B rencontrent toutes deux Δ , on voit sans peine que la transformation s'abaisse au premier degré.

Supposons maintenant que la congruence ait deux directrices

(1) Ce cas a été étudié, sous le nom de *projection gauche*, par STEINER et plus tard par TRANSON.

rectilignes confondues en une seule A . Les quadriques précédentes se raccordent alors le long de A . Soient encore α et α' les points où A perce respectivement P et P' , et γ , γ' les points où Δ est rencontrée par les plans tangents communs aux points α' et α respectivement. Les coniques C' , homologues des droites D , passent en α' , γ et ont $\alpha'\gamma$ pour tangente commune au point α' .

Si A rencontre Δ , α , α' , γ , γ' se confondent en un seul point ω , et deux des coniques C' , n'ayant qu'un point commun en dehors de ω , y ont un contact du second ordre; la tangente commune est encore l'intersection de P' et du plan Π tangent en ω à toutes les quadriques précédemment considérées.

Enfin, si ce plan Π passe par Δ , la transformation s'abaisse encore au premier degré.

2. Nous venons de retrouver les trois types, bien connus, de la transformation birationnelle du second degré. Il nous reste à faire voir, ce qui est presque évident, que nous les avons avec toute la généralité possible. D'une manière plus précise, nous allons prouver que :

Toute transformation birationnelle du second degré s'obtient par une perspective quadratique associée à une perspective linéaire.

Supposons d'abord une transformation birationnelle de deux plans P et P' , avec trois points principaux distincts, α , β , γ pour le premier, α' , β' , γ' pour le second. A une droite Δ de P , passant par γ , correspond dans P' une droite Δ' passant par γ' , et la correspondance des points des deux plans définit sur Δ et Δ' deux divisions homographiques. On peut toujours supposer que, par une perspective linéaire appliquée à l'un des plans, on a fait en sorte que ces deux divisions soient superposables. Plaçons donc le plan P' de manière que Δ' vienne sur Δ et que les deux divisions coïncident effectivement point par point. Soient alors m et m' deux points quelconques homologues de P et P' . Les droites homologues αm et $\alpha' m'$ se coupent sur Δ (confondue avec Δ'), et par suite la droite mm' de l'espace rencontre la droite $\alpha\alpha'$; de même elle rencontre $\beta\beta'$. On a donc bien affaire à une perspective quadratique.

Soit, en second lieu, une transformation quadratique biration-

nelle du second type. Aux droites D du plan P correspondent, dans le plan P' , des coniques C' ayant deux points fixes α' , β' , et ayant en α' une même tangente $\alpha'T'$. De même, aux droites D' de P' correspondent dans P des coniques C ayant deux points fixes α , β et ayant en α une même tangente αT . A une droite Δ passant par α correspond une droite Δ' passant par α' , et l'on a, sur ces deux droites, deux divisions homographiques où α et α' sont homologues. Comme dans le cas précédent, on peut supposer que Δ' coïncide avec Δ , de manière que ces deux divisions coïncident : α et α' en particulier sont confondus en un même point ω de Δ (confondue avec Δ'). Soient alors m et m' deux points homologues quelconques. Les deux droites βm , $\beta' m'$ sont aussi homologues et se coupent par suite sur Δ en un point λ ; donc mm' rencontre $\beta\beta'$. De plus, si l'on désigne par b et b' les points d'intersection respectifs de βm et αT (c'est-à-dire ωT), et de $\beta' m'$ et $\alpha' T'$ (c'est-à-dire $\omega T'$), β est l'homologue de b' et β' celui de b . Les deux divisions homographiques déterminées sur βm et $\beta' m'$ par la correspondance des deux plans ayant un point commun, le point λ , les droites mm' , $\beta b'$, et $\beta' b$ passent par un même point, c'est-à-dire que mm' rencontre l'intersection des deux plans ($\beta\omega T'$), et ($\beta'\omega T$). On a donc bien encore une perspective quadratique.

On peut aussi supposer que l'on a amené β et β' sur l'intersection Δ des deux plans, et que les points de cette droite sont à eux-mêmes leurs homologues. Alors deux rayons homologues αm , $\alpha' m'$ se coupent en λ sur Δ , et si m décrit $\alpha\lambda$, m' se déplace sur $\alpha'\lambda$ de façon que mm' va toujours couper $\alpha\alpha'$ au même point λ_1 . A tout point λ correspond ainsi un point λ_1 et un seul. D'autre part, si p et p' sont deux points homologues non situés dans le plan ($\alpha\lambda\alpha'$), la droite pp' ne passe pas par λ_1 ; sans quoi les droites pm et $p'm'$ se couperaient sur Δ , et, ayant trois points homologues deux à deux, seraient homologues l'une de l'autre; ce qui est impossible, pm par exemple ne passant ni en α ni en β . Donc à un point λ_1 ne correspond aussi qu'un point λ , et il y a correspondance homographique entre les points λ et λ_1 , ou, si l'on veut, entre les plans ($\alpha\lambda\alpha'$) et les points λ_1 par où passent toutes les droites mm' contenues dans l'un de ces plans. C'est dire que la transformation considérée est une perspective quadratique ayant pour directrice rectiligne double la droite $\alpha\alpha'$.

Reste le cas où les trois points principaux de la transformation sont confondus. Aux droites de P correspondent dans P' des coniques ayant un contact du second ordre en un point α' ; aux droites de P' des coniques, situées dans P , et ayant en un point α un contact du second ordre. On peut encore supposer que α et α' coïncident en ω , et que les points de l'intersection Δ des deux plans sont à eux-mêmes leurs homologues. Soient alors m et m' deux points homologues quelconques; les droites ωm , $\omega m'$ sont homologues, et font partie de deux faisceaux homographiques plans, qui ont Δ pour rayon commun. Donc tous les plans $(m \omega m')$ passent par une même droite A . De plus, toutes les droites mm' situées dans un même plan passant par A vont couper cette droite en un même point λ_1 , et l'on verra, comme dans le cas précédent, qu'il y a correspondance homographique entre les plans passant par A et les points λ_1 . La proposition annoncée est dès lors entièrement démontrée.

3. Nous avons, dans ce qui précède, employé la transformation par *perspective quadratique* pour faire correspondre les points de deux plans. On peut s'en servir aussi pour établir une correspondance entre les points de figures quelconques dans l'espace, ou entre les points d'une figure plane et ceux d'une figure de l'espace. Nous allons montrer, à titre d'exemple, que l'on en déduit un moyen bien simple de *faire correspondre (birationnellement) à une courbe plane algébrique n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes une courbe algébrique gauche sans points singuliers* ⁽¹⁾.

Les raisonnements qui suivent reposent sur cette remarque d'Algèbre que, *étant données un nombre quelconque d'équations algébriques entre des indéterminées $u, v, w, h, \dots$,*

$$f_1(u, v, \dots) = 0, \quad f_2(u, v, \dots) = 0, \quad \dots, \quad f_p(u, v, \dots) = 0,$$

il existe toujours des valeurs de $u, v, w, h, \dots$ qui ne satisfont à aucune de ces équations, pourvu qu'aucune d'elles ne soit une identité. En effet, dans l'hypothèse contraire, le produit

⁽¹⁾ Voir, à ce sujet, une Note de M. POINCARÉ dans les *Comptes rendus de l'Académie* (3 juillet 1893).

$f_1 f_2 \dots f_p$ serait identiquement nul, sans qu'aucun de ses facteurs le soit.

Cela posé, soit

$$(C) \quad \zeta = 0, \quad f(\xi, \eta) = 0$$

une courbe algébrique plane n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes; et soit une congruence linéaire, ayant deux directrices rectilignes distinctes A et B, dont les pieds α, β dans le plan des xy ne soient pas sur la courbe C. Soit enfin un plan quelconque

$$(P) \quad P(x, y, z) = ux + vy + wz + h = 0.$$

Par chaque point $M(\xi, \eta)$ de C passe une droite D et une seule appartenant à la congruence : sur cette droite déterminons un point $R(x, y, z)$ par la condition

$$P(x, y, z) = \mu, \quad \mu = \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\partial f}{\partial \xi} : \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Le lieu des points R est une courbe gauche G qui correspond ainsi point par point à C. Je dis qu'on peut disposer des indéterminées u, v, w, h de manière que G n'ait pas de points multiples. C'est ce qui résultera des remarques suivantes :

1° Le degré de G est $c + 2n$, n et c étant l'ordre et la classe de C. On le voit en coupant par le plan des xy ; on obtient d'abord les points situés sur $\alpha\beta$, au nombre de n et tous distincts, si α, β sont convenablement choisis, et si le plan P n'est pas parallèle à $\alpha\beta$. On a de plus les solutions du système

$$(K) \quad (ux + vy + h) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$(C) \quad f(x, y) = 0.$$

Il y a là n^2 nouveaux points, dont il faut défalquer un certain nombre, à cause des points multiples de C. Or un de ces points ne cesse d'être un point simple de K, à tangente distincte de celles de C, que pour des valeurs particulières de u, v, h , que nous écartons. Nous devons donc retrancher le même nombre de points que pour la détermination de la classe, c'est-à-dire $n(n-1) - c$.

Il reste donc un nombre de points égal à

$$n^2 - [n(n-1) - c] = c + n.$$

Et l'on a bien en tout $c + 2n$ points d'intersection, que l'on peut supposer tous distincts; de sorte que ce sont des points simples de la courbe gauche G .

2° Les directions asymptotiques de G sont distinctes. D'abord c de ces directions proviennent des valeurs infinies de μ , qui, par un choix convenable des axes de coordonnées, correspondent à des points M distincts. Deux d'entre elles ne seraient parallèles que si c'étaient des droites de la congruence rencontrant à l'infini l'une des directrices A ou B . Mais alors les points M correspondants seraient sur l'une des droites d'intersection du plan des xy et des plans menés par chacune des directrices parallèlement à l'autre; ce que l'on évite encore par un choix convenable des axes.

Les autres directions asymptotiques proviennent des droites D parallèles au plan P . Ces droites sont sur un paraboloïde qui coupe le plan des xy suivant une conique γ , passant en α et β et coupant C en $2n$ points qu'on peut supposer distincts, puisqu'on peut se donner γ *a priori* et choisir ensuite A , B et P . On a donc là $2n$ directions asymptotiques nouvelles, toutes distinctes, et distinctes des précédentes. Donc, en tout, $c + 2n$ points à l'infini, tous distincts et, par conséquent, tous simples sur G .

3° Les points situés sur A ou B sont simples. Soit en effet R_0 un de ces points, situé sur A par exemple, et coupons G par le plan $P = \mu_0$ qui passe par R_0 . Il y a $2n$ points d'intersection à l'infini et c à distance finie, correspondant aux points de contact des tangentes à C de coefficient angulaire μ_0 . Deux de ces points ne pourraient se confondre en R_0 que dans l'un des trois cas suivants :

a. La droite D_0 correspondante passe par un point multiple de C , d'ordre k par exemple. Mais μ a par hypothèse en ce point k valeurs distinctes, et les k points correspondants situés sur D_0 sont distincts.

b. La droite D_0 a son pied en un point d'inflexion de C . Mais

ces points sont en nombre limité, donc aussi les points où les droites D correspondantes rencontrent A et B . On peut donc, d'après la remarque d'Algèbre faite au début, supposer u, v, w, h tellement choisis qu'aucun de ces derniers points ne soit dans le plan $P = \mu$ qui lui correspond.

c. Par R_0 passent deux droites D_0 . Les pieds de ces droites, M_0 et M'_0 , sont alors sur un même rayon issu de z , et les tangentes en ce point sont de plus parallèles. Or cela n'arrive que pour un nombre limité de rayons passant par z (z étant quelconque) et par suite il n'y correspond qu'un nombre limité de points de A ; on peut donc encore supposer qu'aucun d'eux n'est dans le plan $P = \mu$ correspondant, c'est-à-dire qu'aucun d'eux n'est un point R_0 .

Tout point R_0 est donc bien simple.

4° Tout point R de G , autre que les précédents, est simple. Coupons en effet par le plan (RA) . Il n'y aurait deux points de l'intersection confondus en R que si la trace zM de ce plan sur le plan des xy était tangente en M (point homologue de R) à la courbe C . Mais alors le fait analogue ne peut se produire en coupant par le plan (RB) , à moins que M ne soit un point multiple de C , ce qui n'a pas lieu si l'on prend z et β en dehors des tangentes aux points multiples de C .

Le théorème est donc démontré, car, en vertu de la remarque préliminaire, on peut satisfaire simultanément, par un choix convenable des indéterminées de la transformation, aux diverses conditions d'inégalité que nous avons dû introduire successivement.

4. Remarquons encore que notre courbe G a certainement des cordes qui ne la rencontrent qu'en deux points; car, dans le plan (βA) , par exemple, il n'y a de points de la courbe que sur $z\beta$ et sur A ; de sorte qu'en joignant un des n premiers points à un des $c + n$ autres, on a l'une des cordes annoncées. Si donc on fait la perspective linéaire de G sur un plan, avec un point de vue arbitraire, on obtiendra une courbe C' n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes. Nous avons donc là une démonstration nouvelle de ce théorème connu :

Toute courbe plane algébrique C n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes peut être transformée, par

une transformation birationnelle, en une courbe plane algébrique C' n'ayant pas d'autres singularités que des points doubles à tangentes distinctes ⁽¹⁾.

Notre démonstration nous paraît présenter cet intérêt que l'on pourrait écrire immédiatement la transformation qui change C en C'.

Enfin la même méthode s'appliquera encore pour faire correspondre à une courbe algébrique plane *quelconque* une courbe gauche n'ayant aucun point singulier. Il suffira de remplacer, dans ce qui précède, la quantité μ par une de ces fractions rationnelles qu'Halphen a appris à former ⁽²⁾, et qui jouissent de cette propriété de se développer, pour les points de chacun des cycles de la courbe donnée

$$x = x_k + t_k^{n_k}, \quad y = y_k + t_k^{m_k} [t_k],$$

sous la forme

$$\mu = \mu_k + a_k t_k + \dots, \quad (a_k \neq 0).$$

On voit alors immédiatement, en prenant par exemple le plan $P = 0$ pour l'un des plans de coordonnées, que G n'aura que des cycles d'ordre égal à 1. On pourra de plus disposer de l'indétermination de μ de manière que les différentes valeurs de μ_k , correspondant aux cycles de C qui ont une origine commune, soient inégales; et dès lors, les raisonnements précédents peuvent se reprendre, avec de simples modifications de détails. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute courbe plane algébrique est la perspective quadratique d'une courbe gauche n'ayant aucun point singulier, et la perspective linéaire de cette dernière n'a que des points doubles à tangentes distinctes, si le point de vue est convenablement choisi.

(1) On a longtemps admis ce théorème, sans démonstration rigoureuse. Voir le *Traité d'Analyse* de M. PICARD, t. II, p. 366. M. SIMART (*Comptes rendus de l'Académie*, 8 mai 1893), M. POINCARÉ (*Ibid.*, 3 juillet 1893), M. BERTINI (*Mathematische Annalen*, t. XLIV) en ont donné depuis diverses démonstrations.

(2) Voir, par exemple, son *Étude sur les points singuliers*, dans le *Traité de Géométrie* de SALMON.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Cahen : *Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler.*

M. D. André : *Sur un théorème empirique d'Arithmétique.*

M. Carvallo : *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du mouvement de propagation en Physique mathématique.*

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Fouret : *Sur un théorème de Mécanique.*

M. Émile Picard transmet une Note de M. E. Cartan *Sur un théorème de M. Bertrand.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace.

J'ai donné récemment, à la Société Philomathique, la démonstration du théorème suivant :

Si un point matériel, M, animé de la vitesse MV , et soumis à la force MF , satisfait à la loi des aires par rapport à un point fixe O, c'est-à-dire si les aires décrites par OM sur la surface du cône de sommet O sont proportionnelles aux temps, les deux plans OMV, OMF sont constamment perpendiculaires.

La démonstration que j'ai communiquée à la Société Philomathique, bien que facile, peut encore être simplifiée d'une façon qui rend pour ainsi dire le théorème intuitif et se prête à une intéressante généralisation.

Si en effet nous posons $\mathbf{p} = \mathbf{v} \left(\mathbf{M} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)$, l'extrémité du vecteur $\mathbf{p}$, vitesse aréolaire, décrira une courbe (P) que j'ai appelée l'*hodographe aréolaire* des mouvements. La vitesse de ce point P sera

$$\mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \left(\mathbf{M} \frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2} \right).$$

Or, $\mathbf{p}'$ étant l'axe du plan OMF, $\mathbf{p}$ celui du plan OMV, il s'ensuit que l'angle de $\mathbf{p}'$ et de $\mathbf{p}$ sera égal à celui des deux plans en question.

Donc l'angle des deux plans OMV, OMF est égal à celui que forme la vitesse sur l'hodographe aréolaire avec le rayon OP correspondant.

Si la loi des aires est vérifiée, la grandeur de OP est constante, l'hodographe (P) est une courbe sphérique, et l'angle de $\mathbf{p}'$ avec $\mathbf{p}$ est droit. Nous avons donc, comme corollaire, l'énoncé rappelé au début de cette Note.

Si l'hodographe se réduit à la droite OP, l'angle considéré est nul, et la force est évidemment dirigée dans le plan OMV, le mouvement étant plan.

Si ces deux circonstances se produisent à la fois, nous tombons dans le cas des forces centrales, la force étant dirigée suivant MO. L'hodographe aréolaire se réduit alors à un point.

De là résulte un moyen graphique des plus simples pour avoir le plan osculateur à une courbe donnée (M). Si en effet nous considérons cette courbe comme parcourue d'un mouvement uniforme, il suffira d'élever, par un point fixe O, une perpendiculaire OP au plan OMV et de porter sur cette droite une longueur OP proportionnelle, ou simplement égale, à la distance de O à la tangente MV. On obtiendra ainsi une courbe (P) dont la tangente en P sera perpendiculaire au plan OMF. Donc, en menant par O, ou par M, un plan perpendiculaire à la tangente en P, son intersection avec le plan normal en M donnera la normale principale MF, la force étant normale puisque le mouvement est uniforme.

Appelons r , v , α les grandeurs du rayon OM, de la vitesse et de l'accélération du point M, θ l'angle de la vitesse avec OM, φ celui de l'accélération avec la même droite. Les grandeurs de $\mathbf{p}$ et de $\mathbf{p}'$ sont alors $rv \sin \theta$, $r\alpha \sin \varphi$, et il s'ensuit en particulier

que le rayon vecteur OP et la vitesse sur l'hodographe aréolaire sont dans le même rapport que les projections de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement considéré, sur un plan perpendiculaire à OM .

M. MANNHEIM adresse la Note suivante :

Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice.

Dans une Communication que j'ai faite à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾, j'ai montré de plusieurs manières comment on peut déterminer les éléments principaux de courbure d'une surface (S) lorsqu'on connaît les centres de courbure de trois courbes de contour apparent de cette surface.

L'une d'elles est fondée sur une propriété de l'indicatrice, qui n'avait pas encore été signalée, et que j'ai seulement énoncée.

Depuis, j'ai donné deux démonstrations de cette propriété ⁽²⁾; j'en apporte aujourd'hui une troisième, plus simple encore que les précédentes.

Soient a un point de (S) et A la normale en ce point à cette surface. Projetons (S) sur un plan mené par A au moyen de projetantes perpendiculaires à ce plan; on obtient ainsi une courbe de contour apparent dont le centre de courbure correspondant à a est un point de A .

Il s'agit de faire voir que :

Les rayons de courbure en a des courbes de contour apparent de (S) , obtenues sur des plans menés par A au moyen de projetantes respectivement perpendiculaires à ces plans, sont proportionnels aux carrés des distances de a aux tangentes de l'indicatrice de (S) en ce point, tangentes qui sont parallèles à ces projetantes.

Appelons l l'indicatrice de (S) , courbe qui est tracée sur le plan tangent en a à cette surface.

Les tangentes à cette courbe parallèles aux projetantes forment

(1) Séance du 13 août 1894.

(2) *Messenger of Mathematics*, août 1894.

l'indicatrice du cylindre circonscrit à la surface (S), cylindre qui la projette orthogonalement sur un plan mené par A.

Appelons c le point de contact d'une de ces tangentes avec I et p le pied de la perpendiculaire abaissée de a sur cette droite.

Désignons par R le rayon de courbure pour le point a de la section faite dans le cylindre par le plan (A, ap); R est le rayon de courbure de la courbe de contour apparent de (S) projeté sur A.

Désignons par ρ le rayon de courbure de la section faite dans le cylindre par le plan (A, ac); ρ est aussi le rayon de courbure de la section faite par le même plan dans (S).

Puisque la droite cp appartient à l'indicatrice du cylindre, on a

$$\frac{R}{ap^2} = \frac{\rho}{ac^2}.$$

Ce dernier rapport est constant, lorsque la direction des projetantes varie, puisque les points tels que c sont toujours sur I. Le rapport $\frac{R}{ap^2}$ est alors constant, quel que soit le plan mené par A, et la propriété est démontrée.

Appelons R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de (S) en a , φ l'angle des projetantes avec le grand axe de I et α, β les demi-axes de cette indicatrice. On a

$$\frac{R}{ap^2} = \frac{R_1}{\alpha^2},$$

mais

$$\frac{1}{ap^2} = \alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi;$$

on a alors

$$R = R_1 \sin^2 \varphi + \frac{\beta^2 R_1}{\alpha^2} \cos^2 \varphi.$$

Comme $\frac{\beta^2 R_1}{\alpha^2} = R_2$, il vient $R = R_1 \sin^2 \varphi + R_2 \cos^2 \varphi$, qui est l'expression connue.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR LA DÉFORMATION INFINITÉSIMALE DES SURFACES;

Par M. E. GENTY.

Dans un Mémoire non encore publié relatif à la déformation infinitésimale des surfaces, j'ai obtenu quelques propositions, dont l'énoncé intéressera peut-être les lecteurs du *Bulletin*.

1. M. Bianchi dit que deux surfaces (A) et (B) sont *associées*, lorsqu'elles se correspondent point par point, avec parallélisme des plans tangents, de telle sorte qu'aux asymptotiques de l'une corresponde sur l'autre un réseau conjugué.

Soient x, y et z ; x_1, y_1 et z_1 les coordonnées de deux points correspondants A et B, de deux surfaces (A) et (B) qui se correspondent point par point. Pour que ces deux surfaces soient associées, il faut et il suffit que les expressions $z_1 dy - y_1 dz$, $x_1 dz - z_1 dx$, $y_1 dx - x_1 dy$ soient des différentielles exactes, de telle sorte qu'on puisse poser

$$(1) \quad \begin{cases} z_1 dy - y_1 dz = d\xi, \\ x_1 dz - z_1 dx = d\eta, \\ y_1 dx - x_1 dy = d\zeta. \end{cases}$$

ξ, η et ζ sont alors les coordonnées d'un point M d'une surface (M) correspondant à (A) par orthogonalité des éléments.

2. Si les premiers membres des équations (1) sont des différentielles exactes, il en sera de même des expressions $z dy_1 - y dz_1$, $x dz_1 - z dx_1$, $y dx_1 - x dy_1$, et l'on pourra poser

$$(2) \quad \begin{cases} z dy_1 - y dz_1 = d\xi_1, \\ x dz_1 - z dx_1 = d\eta_1, \\ y dx_1 - x dy_1 = d\zeta_1. \end{cases}$$

ξ_1, η_1 et ζ_1 seront les coordonnées d'un point N définissant une surface (N) qui correspond à (B) par orthogonalité des éléments.

On aura d'ailleurs

$$d\xi - d\xi_1 = d(yz_1 - y_1z),$$

$$d\tau - d\tau_1 = d(zx_1 - z_1x),$$

$$d\zeta - d\zeta_1 = d(xy_1 - x_1y),$$

ou, en disposant convenablement des constantes introduites par les intégrations,

$$(3) \quad \begin{cases} \xi - \xi_1 = yz_1 - y_1z, \\ \tau - \tau_1 = zx_1 - z_1x, \\ \zeta - \zeta_1 = xy_1 - x_1y. \end{cases}$$

3. Soient X, Y et Z les cosinus directeurs de la normale au point A de (A), u et v les paramètres arbitraires auxquels on rapporte la surface, et posons

$$D_A = - \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u},$$

$$D'_A = - \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = - \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u},$$

$$D''_A = - \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v},$$

où nous désignons par le signe $\sum$ une somme étendue à trois termes jouant le même rôle par rapport aux trois axes coordonnés.

Les quantités D_A , D'_A et D''_A seront, à un facteur commun près, pour la surface (A), les déterminants de Gauss D, D' et D''; nous les appellerons les *coefficients de forme* de (A).

On aura de même, pour les coefficients de forme de (B),

$$D_B = - \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u},$$

$$D'_B = - \sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = - \sum \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u};$$

$$D''_B = - \sum \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v};$$

et la condition qui exprime qu'aux asymptotiques de l'une des surfaces correspond sur l'autre un réseau conjugué prend la forme

$$(4) \quad D_A D''_B - 2 D'_A D'_B + D''_A D_B = 0.$$

Or, si l'on pose

$$\sum x_1 X = p,$$

p sera la distance de l'origine au plan tangent en B à (B) et l'on aura

$$D_B = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial u} - \alpha' \frac{\partial p}{\partial v} + ep \right),$$

$$D'_B = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta' \frac{\partial p}{\partial v} + fp \right),$$

$$D''_B = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma \frac{\partial p}{\partial u} - \gamma' \frac{\partial p}{\partial v} + gp \right),$$

e, f et g désignant les coefficients de l'élément linéaire de la représentation sphérique de (A), $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ et γ' les symboles de Christoffel dérivés de cet élément linéaire.

Si enfin dans l'équation (4) on remplace D_B, D'_B et D''_B par les expressions qui précèdent, il vient

$$(5) \left\{ \begin{aligned} D_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} - \gamma \frac{\partial p}{\partial u} - \gamma' \frac{\partial p}{\partial v} + gp \right) - 2 D'_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \beta \frac{\partial p}{\partial u} - \beta' \frac{\partial p}{\partial v} + fp \right) \\ + D''_A \left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial u} - \alpha' \frac{\partial p}{\partial v} + ep \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre d'où dépend la recherche d'une surface (B) associée à une surface donnée (A). Elle a pour caractéristiques les asymptotiques de (A).

On a d'ailleurs

$$x_1 = pX + \frac{\frac{\partial p}{\partial u} \left(Z \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial Z}{\partial v} \right) + \frac{\partial p}{\partial v} \left(Y \frac{\partial Z}{\partial u} - Z \frac{\partial Y}{\partial u} \right)}{h},$$

avec les expressions analogues pour y_1 et z_1 .

Ainsi :

Toute solution p de l'équation (5) détermine :

- 1° Une surface (B) associée à (A) ;
- 2° Deux surfaces (M) et (N) correspondant respectivement à (A) et (B) par orthogonalité des éléments ;
- 3° Quatre couples de surfaces applicables dont la construction est bien connue ;

Enfin, une déformation infinitésimale des surfaces (A), (B), (M) et (N) définie par les relations

$$\begin{aligned} (A') \quad & \begin{cases} x' = x + \varepsilon \xi, \\ y' = y + \varepsilon \eta, \\ z' = z + \varepsilon \zeta, \end{cases} & (B') \quad & \begin{cases} x'_1 = x_1 + \varepsilon_1 \xi_1, \\ y'_1 = y_1 + \varepsilon_1 \eta_1, \\ z'_1 = z_1 + \varepsilon_1 \zeta_1; \end{cases} \\ (M') \quad & \begin{cases} \xi' = \xi + \varepsilon_2 \xi_2, \\ \eta' = \eta + \varepsilon_2 \eta_2, \\ \zeta' = \zeta + \varepsilon_2 \zeta_2, \end{cases} & (N') \quad & \begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 + \varepsilon_3 \xi_3, \\ \eta'_1 = \eta_1 + \varepsilon_3 \eta_3, \\ \zeta'_1 = \zeta_1 + \varepsilon_3 \zeta_3. \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation (5) admet pour solution particulière le cosinus de l'angle de la normale en A à (A) avec une direction fixe quelconque.

Pour cette solution, l'associée de (A) se réduit à un point fixe B; la surface (M) est un plan et la déformation correspondante de (A) consiste dans une rotation autour de OB, suivie d'une translation. La surface est donc simplement déplacée, mais non déformée. A toute autre solution de l'équation (3) correspond une déformation effective de (A).

4. Des relations (1) et (2) on tire

$$dx = \frac{Y d\xi - Z d\eta}{p}, \quad dx_1 = \frac{Y d\xi_1 - Z d\eta_1}{q},$$

où $q = \int x X$ désigne la distance de l'origine au plan tangent en A à (A), avec des expressions analogues pour les différentielles des autres coordonnées.

Donc le point M_1 , qui a pour coordonnées

$$\frac{X}{p}, \quad \frac{Y}{p}, \quad \frac{Z}{p},$$

définit une surface (M_1) associée à M; c'est la polaire réciproque de (B) par rapport à l'origine.

De même l'associée de (N) est la polaire réciproque de (A) par rapport à l'origine.

5. Par des calculs très simples, on obtient, pour les coefficients

de forme des surfaces (M), (N), (A'), etc., les expressions suivantes :

$$D_M = \frac{p}{bh} (D_A D'_B - D'_A D_B),$$

$$D'_M = \frac{p}{bh} (D_A D''_B - D'_A D'_B) = \frac{p}{bh} (D'_A D'_B - D''_A D_B),$$

$$D''_M = \frac{p}{bh} (D'_A D''_B - D''_A D'_B);$$

$$D_N = \frac{bq}{ap} D_S,$$

$$D'_N = \frac{bq}{ap} D'_S,$$

$$D''_N = \frac{bq}{ap} D''_S;$$

$$D_{A'} = D_A + \frac{\varepsilon b}{\rho} D_M,$$

$$D'_{A'} = D'_A + \frac{\varepsilon b}{\rho} D'_M,$$

$$D''_{A'} = D''_A + \frac{\varepsilon b}{\rho} D''_M;$$

$$D_{B'} = D_B + \frac{\varepsilon_1 b}{\rho} D_M,$$

$$D'_{B'} = D'_B + \frac{\varepsilon_1 b}{\rho} D'_M,$$

$$D''_{B'} = D''_B + \frac{\varepsilon_1 b}{\rho} D''_M;$$

$$D_{M'} = D_M + \frac{\varepsilon_2 b}{\rho} D_A,$$

$$D'_{M'} = D'_M + \frac{\varepsilon_2 b}{\rho} D'_A,$$

$$D''_{M'} = D''_M + \frac{\varepsilon_2 b}{\rho} D''_A;$$

$$D_{N'} = D_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D_B,$$

$$D'_{N'} = D'_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D'_B,$$

$$D''_{N'} = D''_N + \frac{\varepsilon_3 a}{q} D''_B,$$

où l'on a posé

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{OA},$$

$$b = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \overline{OB}.$$

Soient d'abord u et v les paramètres du réseau conjugué commun à (A) et (B). On aura

$$D'_A = D'_B = 0$$

et, par suite,

$$D_M = D''_M = D_N = D''_N = 0.$$

Donc au réseau conjugué commun aux deux surfaces associées (A) et (B) correspondent les asymptotiques des surfaces (M) et (N).

Soient maintenant u et v les paramètres des asymptotiques de (A). On aura

$$D_A = D''_A = D'_B = D'_M = D'_N = D''_N = D'_{N_1} = 0;$$

on peut donc énoncer la proposition suivante :

Aux asymptotiques de (A) correspondent : les réseaux conjugués des surfaces (B) et (N) qui restent conjugués dans la déformation infinitésimale correspondante de ces deux surfaces; un réseau conjugué sur (M); les asymptotiques de la surface (N₁) associée à (N).

On a

$$D_A D''_B - D'_A D'_B + D''_A D_B = 0.$$

Donc aux asymptotiques de (A') correspond sur (B') un réseau conjugué et inversement.

6. Reprenons enfin les équations (3)

$$\xi - \xi_1 = yz_1 - y_1 z,$$

$$\eta - \eta_1 = zx_1 - z_1 x,$$

$$\zeta - \zeta_1 = xy_1 - x_1 y.$$

La normale en M à (M) étant parallèle à OB et la normale en N à (N) étant parallèle à OA, ces équations montrent que (M) et (N) sont les deux nappes de la surface focale de la congruence

engendrée par la droite MN ; et, comme les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, on a immédiatement la proposition suivante de Ribaucour :

Considérons une déformation infinitésimale d'une surface (A) et, par chaque point A de (A), menons, dans le plan tangent à cette surface, la droite perpendiculaire au déplacement que subit le point A dans la déformation; les droites ainsi construites forment une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

On a, d'ailleurs,

$$\sum (\xi - \xi_1)^2 = \sum (yz_1 - y_1 z)^2$$

ou

$$\overline{MN} = ab \sin V,$$

V étant l'angle des directions OA et OB.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE QUI DONNE LA CONSTANCE D'EULER;

Par M. E. CAHEN.

On sait que la constante d'Euler est définie par la formule

$$(1) \quad C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Considérons l'expression

$$(2) \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - 1}{1-s}$$

où nous supposons que s est une quantité dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Cette expression se réduit à

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

pour $s = 1$.

On démontre facilement que l'expression (2) a une limite

pour $n = \infty$; nous allons voir de plus que cette limite est

$$\zeta(s) + \frac{1}{1-s},$$

$\zeta(s)$ étant la fonction bien connue de Riemann.

Plus simplement, la limite de

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

est $\zeta(s)$.

En effet, soit

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} = \zeta_n(s).$$

Alors

$$\begin{aligned} \zeta_n(s) - \zeta_{n-1}(s) &= \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - (n-1)^{1-s}}{1-s} \\ &= - \left(\frac{s}{1.2} \frac{1}{n^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1.2.3} \frac{1}{n^{s+2}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Faisons dans cette égalité $n = 2, 3, \dots, n$ et ajoutons; puis faisons croître n indéfiniment. Nous obtenons, en remarquant que la partie réelle de s est plus grande que zéro, par hypothèse,

$$\lim \zeta_n(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - \left\{ \frac{s}{1.2} [\zeta(s+1) - 1] + \frac{s(s+1)}{1.2.3} [\zeta(s+2) - 1] + \dots \right\}.$$

Or

$$1 - \frac{1}{1-s} + \frac{s}{1.2} + \frac{s(s+1)}{1.2.3} + \dots$$

est nul, comme on le voit en développant $(1-1)^{1-s}$ d'après la formule du binôme.

Il reste donc

$$\lim \zeta_n(s) = - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{s(s+1) \dots (s+p-1)}{1.2 \dots p(p+1)} \zeta(s+p).$$

Done, pour démontrer que $\lim \zeta_n(s) = \zeta(s)$, il suffit de démontrer que

$$(3) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1) \dots (s+p-1)}{1.2 \dots p(p+1)} \zeta(s+p) = 0.$$

Pour démontrer cette formule, on peut se servir de l'expression suivante de $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_c \frac{x^{s-1} dx}{e^{-x}-1},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine, mais aucun autre zéro de la fonction $e^{-x}-1$, et s'étendant à l'infini du côté des x négatifs.

La formule (3) à démontrer devient alors

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{dx}{e^{-x}-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)} \Gamma(1-s-p) x^{s+p-1}.$$

Or

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)} \Gamma(1-s-p) x^{s+p-1} = -x^{s-2} \Gamma(1-s)(e^{-x}-1);$$

donc la formule à démontrer se réduit à

$$0 = -\frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_c x^{s-2} dx.$$

Elle est alors évidente, puisque la partie réelle de s est plus petite que 1.

Remarquons que la formule

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \right)$$

que nous venons de démontrer pour les valeurs de s , dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1, est d'ailleurs évidente pour celles dont la partie réelle est plus grande que 1.

Pour $s=1$, elle donne la formule (1), car on sait que

$$\zeta(s) = C + \frac{1}{1-s} + A(s-1) + B(s-1)^2 + \dots$$

SUR UN THÉORÈME DE M. BERTRAND;

Par M. E. CARTAN.

Il existe un certain nombre de démonstrations du célèbre théorème énoncé et démontré pour la première fois en 1845 par M. J. Bertrand :

Toute fonction rationnelle de n lettres ($n \neq 4$), qui n'est ni symétrique ni alternée, prend au moins n valeurs distinctes, lorsqu'on y permute ces lettres.

Ce théorème a été démontré depuis par Cauchy, Serret et M. Jordan. Mais les démonstrations que ces géomètres en ont données sont assez longues et exigent des connaissances assez étendues sur la théorie des substitutions. Il me semble qu'on peut le déduire immédiatement de deux lemmes, connus d'ailleurs depuis très longtemps, et dont la démonstration se fait d'une façon tout à fait élémentaire. Voici comment on peut présenter la chose, en ne supposant connues que les notions de substitutions, de produit de substitutions et de groupes de substitutions.

1. Soit $F(a, b, c, \dots, l)$ une fonction rationnelle des n lettres $a, b, \dots, l$, prenant p valeurs distinctes

$$F_1 = F_1, F_2, F_3, \dots, F_p,$$

lorsqu'on y permute les lettres $a, b, \dots, l$ de toutes les façons possibles. Si l'on effectue sur une quelconque de ces p fonctions une substitution des n lettres, cela revient à effectuer sur F deux substitutions successives, c'est-à-dire qu'on obtient encore une des fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$. De plus, une même substitution, effectuée sur deux fonctions distinctes, donne naissance à deux fonctions distinctes. Il en résulte qu'à chaque substitution S des n lettres $a, b, \dots, l$ on peut faire correspondre une permutation des p quantités $F_1, F_2, \dots, F_p$, à savoir

$$F_1 S, F_2 S, \dots, F_p S,$$

en désignant par $F_i S$ ce que devient F_i par la substitution S . On obtient ainsi $N = n!$ permutations des p quantités F . Ces N per-

mutations ne sont pas nécessairement toutes distinctes. Une quelconque d'entre elles coïncidera avec $(q - 1)$ autres, s'il y a q substitutions n'altérant aucune des quantités $F_1, F_2, \dots, F_p$, et réciproquement. Soient

$$1, T_1, T_2, \dots, T_{q-1}$$

toutes les substitutions qui jouissent de cette propriété. Nous aurons formé $\frac{N}{q}$ permutations distinctes des p quantités $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Il est évident que le produit de deux quelconques des substitutions T est encore une substitution T , car c'est une substitution qui n'altère évidemment aucune des quantités F . Donc les substitutions T forment un groupe Γ . Il y a plus. Soit S une substitution quelconque des n lettres $a, b, \dots, l$. On a, quel que soit α ,

$$F_\alpha S T_i = F_\alpha S,$$

d'où, en effectuant sur les deux membres la substitution S^{-1} inverse de S ,

$$F_\alpha S T_i S^{-1} = F_\alpha S S^{-1} = F_\alpha,$$

et, par suite,

$$S T_i S^{-1} = T_k.$$

La substitution $S T_i S^{-1}$ est dite *transformée* de T_i par la substitution S^{-1} . On voit donc que toute substitution de Γ est transformée par une substitution quelconque en une autre substitution de Γ . Pour cette raison Γ est dit *invariant* dans le groupe total des substitutions des n lettres $a, b, \dots, l$ ou, autrement dit, dans le groupe symétrique de ces n lettres.

Si l'on remarque que, parmi les $\frac{N}{q}$ permutations des p quantités F , il y en a au moins p distinctes, puisque la première quantité F_1 de la première permutation peut devenir $F_2, F_3, \dots, F_p$, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante :

Si F est une fonction rationnelle des n lettres $a, b, \dots, l$ prenant p valeurs distinctes lorsqu'on y permute ces lettres, il existe un système de $\frac{n!}{q}$ permutations distinctes de p lettres, où q désigne le nombre des substitutions d'un groupe de n lettres invariant dans le groupe symétrique, et de plus on a

les inégalités

$$p \leq \frac{n!}{q} \leq p!$$

2. Il s'agit maintenant de chercher toutes les valeurs possibles du nombre q , parmi lesquelles se trouve évidemment la valeur 1, si aucune substitution ne conserve toutes les fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Si l'on remarque que toute substitution peut être obtenue par une succession de transpositions de deux lettres, le nombre de ces transpositions conservant toujours la même parité, de quelque façon qu'on procède, il est clair que l'ensemble des substitutions résultant d'un nombre pair de transpositions forme un groupe G . Ce groupe est invariant dans le groupe symétrique, car si T est une de ses substitutions, S une substitution quelconque de n lettres, STS^{-1} résulte évidemment, comme T , d'un nombre pair de transpositions. Ce groupe G s'appelle le *groupe alterné*, et il contient la moitié des substitutions de n lettres, c'est-à-dire $\frac{n!}{2}$. Il peut évidemment être obtenu au moyen des substitutions qui sont les produits de *deux* transpositions, substitutions qui sont de la forme (abc) ou $(ab)(cd)$, suivant que ces deux transpositions déplacent ou non une lettre commune⁽¹⁾. Il suffit même de prendre les cycles de trois lettres, car on a

$$(abc)(abd) = (ad)(bc).$$

Si n est différent de 4, il n'y a pas d'autre groupe invariant dans le groupe symétrique que la substitution identique et le groupe alterné. Pour le démontrer, je rappelle que, si une substitution T est décomposée en cycles

$$T = (ab\dots d)(ef\dots) \dots,$$

la transformée de T , par une substitution quelconque S , est formée du même nombre de cycles, chacun d'eux échangeant le même nombre de lettres. Car, si S remplace respectivement $a, b, \dots, d$ par $\alpha, \beta, \dots, \delta$, la substitution $S^{-1}TS$ contiendra manifestement

(1) Je désigne comme d'habitude par la notation $(\alpha\beta\dots\lambda)$ la substitution circulaire (ou cycle) effectuée sur les lettres $\alpha, \beta, \dots, \lambda$.

le cycle $(\alpha\beta\dots\delta)$. C'est pour cela que $S^{-1}TS$ est dite *semblable* à T , et si T fait partie d'un groupe invariant dans le groupe symétrique, il en sera de même de toutes les substitutions semblables à T .

Cela étant, soit Γ un groupe invariant dans le groupe symétrique. « Supposons en premier lieu que, parmi les cycles d'une de ses substitutions T , il en existe un contenant plus de deux lettres, $T = (abc\dots d)(ef\dots)\dots$. Soient α, β, δ trois lettres quelconques; $\gamma, \varepsilon, \varphi, \dots$ les autres. Les substitutions

$$T_1 = (\alpha\beta\gamma\dots\delta)(\varepsilon\varphi\dots)\dots \quad \text{et} \quad T_2 = (\beta\alpha\gamma\dots\delta)(\varepsilon\varphi\dots)\dots,$$

semblables à T , faisant partie de Γ , $T_2T_1^{-1}$ en fera également partie; mais cette substitution se réduit au cycle $(\alpha\beta\delta)$ des trois lettres arbitraires α, β, δ .

» Si tous les cycles de T contiennent au plus deux lettres, soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre lettres arbitraires; $\varepsilon, \varphi, \dots$ les autres; Γ contiendra les deux substitutions $T_1 = (\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\varphi)\dots$, $T_2 = (\alpha\gamma)(\beta\delta)(\varepsilon\varphi)\dots$, et par suite $\Sigma = T_1T_2 = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$. Si $n > 4$, Γ contiendra de même $\Sigma_1 = (\alpha\zeta)(\beta\gamma)$, où ζ est une lettre arbitraire autre que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et, par suite aussi, $\Sigma\Sigma_1 = (\alpha\delta\zeta)$ ⁽¹⁾. »

Donc dans tous les cas Γ contient tous les cycles de trois lettres et, par suite, toutes les substitutions du groupe alterné. S'il en contenait une autre non alternée S , en désignant par U une transposition quelconque, il contiendrait la substitution alternée US et, par suite aussi, $(US)S^{-1} = U$, donc toutes les transpositions et toutes les substitutions de n lettres.

La proposition est donc démontrée, et q ne peut avoir, si n est différent de 4, que l'une des valeurs 1 ou $\frac{n!}{2}$.

3. Cela étant, le théorème en vue se démontre immédiatement. Si q est égal à 1, les inégalités

$$p \leq \frac{n!}{q} \leq p!$$

exigent que p soit au moins égal à n ; si q est égal à $\frac{n!}{2}$, les

(1) JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 63.

mêmes inégalités exigent que p soit égal à 2 et alors la fonction F admet le groupe alterné, c'est-à-dire est alternée.

On peut démontrer que, dans le cas de $n \neq 4$, le groupe alterné n'admet aucun sous-groupe invariant. L'application des mêmes raisonnements montre alors que *toute fonction non alternée de n lettres prend au moins n valeurs distinctes par les substitutions du groupe alterné.*

P.-S. Depuis la rédaction de cette Note, j'ai appris que M. E. Maillet, ingénieur des Ponts et Chaussées, avait, dans une thèse parue en novembre 1892, donné du théorème de M. Bertrand une démonstration fondée sur des principes analogues à ceux que j'ai exposés. M. Maillet, en partant du fait que le groupe alterné n'admet pas de sous-groupe invariant, en déduit (p. 20-21) que toute fonction non alternée de n lettres prend au moins n valeurs distinctes par les substitutions du groupe alterné, d'où résulte facilement le théorème en question. On voit que ma démonstration ne suppose pas connue la propriété du groupe alterné invoquée par M. Maillet.

SUR L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE;

Par M. E. CARVALLO.

1. M. Poincaré ⁽¹⁾ a étudié l'équation aux dérivées partielles, dite *des télégraphistes*, qu'il a ramenée à la forme

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d^2 U}{dx^2} + U.$$

Il a montré que la propagation de l'ébranlement U se fait avec une vitesse constante égale à l'unité. Cet important résultat a provoqué d'intéressantes Notes de MM. Picard ⁽²⁾ et Boussinesq ⁽³⁾ sur le même sujet.

Je me propose d'aborder ici la même équation, mais *avec se-*

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVII, p. 1027, déc. 1893.

⁽²⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 16, janv. 1894.

⁽³⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVIII, p. 162, janv. 1894.

cond membre,

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \frac{d^2 U}{dx^2} - U = F(x, t),$$

qui a aussi un grand intérêt en Physique mathématique.

2. Rappelons d'abord quelques résultats relatifs à l'équation des cordes vibrantes :

1° L'équation

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2}$$

se ramène à la forme

$$\frac{d^2 U}{du dv} = 0$$

par le changement de variables

$$2u = t + \frac{x}{a}, \quad 2v = t - \frac{x}{a}$$

et a pour intégrale générale

$$U = f\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

Les fonctions arbitraires f et φ se déterminent par deux conditions aux limites variables suivant les cas.

2° De cette intégrale on conclut que le mouvement se propage d'un point à un autre avec la vitesse a , ce qui conduit, par induction, à découvrir l'intégrale de l'équation à second membre

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} + F(x, t).$$

Imaginons en effet que la corde parte du repos et que, à partir de l'époque $t = 0$, agissent brusquement des forces normales à la corde et représentées par la fonction donnée $F(x, t)$. Les hypothèses sont alors celles-ci

$$\begin{aligned} U(x, t) &= 0, & \frac{d}{dt} U(x, t) &= 0, & \text{pour } t &= 0, \\ F(x, t) &= 0, & & & \text{pour } t < 0. \end{aligned}$$

Il y a lieu de penser que le point x subit à l'époque t les actions de tous les points ξ qui sont à une distance de lui dont la

valeur r est inférieure à at , l'action du point ξ se faisant d'ailleurs sentir avec un retard $\frac{r}{a}$ égal au temps que met cette action à parcourir la distance r . D'après cette induction, l'intégrale cherchée doit être de la forme

$$U = \int_{x-at}^{x+at} f\left(\xi, t - \frac{r}{a}\right) d\xi.$$

En portant cette valeur de U dans l'équation à intégrer, on peut déterminer f de façon que l'expression de U soit bien l'intégrale cherchée. Le calcul est un peu encombrant; comme il est compris à titre de cas particulier dans celui qui va suivre, je me dispense de le reproduire ici et j'aborde tout de suite le cas qui fait l'objet de ce travail.

3. Je considère l'équation

$$(I) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - k^2 U + F(x, t).$$

C'est, si l'on veut, l'équation du mouvement d'une corde qui, outre les forces d'élasticité, subirait la force $F(x, t)$ et une réaction proportionnelle à l'élongation $-k^2 U$.

Je suppose, comme précédemment,

$$(II) \quad \begin{cases} U(x, t) = 0, & \frac{d}{dt} U(x, t) = 0, & \text{pour } t = 0, \\ F(x, t) = 0, & & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

Au numéro précédent, la fonction $f\left(\xi, t - \frac{r}{a}\right)$, introduite pour former l'intégrale cherchée, était une solution de l'équation à intégrer, privée de son second membre et où on a remplacé x par r . Il est alors à prévoir que la fonction $f\left(t - \frac{r}{a}\right)$ devra être remplacée ici par une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 U}{dr^2} - k^2 U.$$

C'est en effet ce que nous allons trouver; mais, pour ne rien préjuger, je considérerai une fonction quelconque $f(t, r)$, variable

d'ailleurs avec le point ξ et que je désignerai par $f(\xi, t, r)$. En outre, je suppose qu'il existe une vitesse de propagation que je désigne par v . M. Poincaré nous a enseigné que l'on a $v = a$; mais il est intéressant de retrouver ici cet important résultat. Ainsi je pose

$$(III) \quad U(x, t) = \int_{x-vt}^{x+vt} f(\xi, t, r) d\xi,$$

r désignant toujours la valeur absolue de la distance du point x au point ξ variable dans le champ de l'intégration.

Je porterai cette valeur dans l'équation (I) et je montrerai que l'on peut déterminer la fonction f de façon que (III) soit l'intégrale cherchée de (I). Je calcule donc les dérivées de l'expression (III) que j'écris

$$(III) \quad U(x, t) = \int_{x-vt}^x f(\xi, t, r=x-\xi) d\xi + \int_x^{x+vt} f(\xi, t, r=\xi-x) d\xi.$$

Il vient, pour les dérivées par rapport à t ,

$$(III)' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t, r=x-\xi) d\xi + \int_x^{x+vt} \frac{\partial}{\partial t} f(\xi, t, r=\xi-x) d\xi \\ &\quad + v f(\xi=x-vt, t, r=vt) + v f(\xi=x+vt, t, r=vt), \end{aligned} \right.$$

puis

$$(III)'' \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dt^2} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi, t, r=x-\xi) d\xi + \int_x^{x+vt} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\xi, t, r=\xi-x) d\xi \\ &\quad + 2v \frac{\partial}{\partial t} f(\xi=x-vt, t, r=vt) + 2v \frac{\partial}{\partial t} f(\xi=x+vt, t, r=vt) \\ &\quad - v^2 \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi=x-vt, t, r=vt) + v^2 \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi=x+vt, t, r=vt) \\ &\quad + v^2 \frac{\partial}{\partial r} f(\xi=x-vt, t, r=vt) + v^2 \frac{\partial}{\partial r} f(\xi=x+vt, t, r=vt). \end{aligned} \right.$$

Pour les dérivées par rapport à x , j'obtiens

$$(III)_1 \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial}{\partial r} f(\xi, t, r=x-\xi) d\xi - \int_x^{x+vt} \frac{\partial}{\partial r} f(\xi, t, r=\xi-x) d\xi \\ &\quad - f(\xi=x-vt, t, r=vt) + f(\xi=x+vt, t, r=vt). \end{aligned} \right.$$

puis

$$(III)_2 \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} &= \int_{x-vt}^x \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(\xi, t, r = x - \xi) d\xi + \int_x^{x+vt} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(\xi, t, r = \xi - x) d\xi \\ &- \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x - vt, t, r = vt) - \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0) + \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0) \\ &- \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt, t, r = vt) + \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x + vt, t, r = vt). \end{aligned} \right.$$

Je porte les valeurs obtenues pour U , $\frac{d^2 U}{dt^2}$, $\frac{d^2 U}{dx^2}$ dans l'équation (I); il vient

$$(I)' \left\{ \begin{aligned} F(x, t) &= \int_{x-vt}^{x+vt} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right] f(\xi, t, r) d\xi \\ &+ \left[2v \frac{\partial}{\partial t} + (-v^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + (v^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial r} \right] f(\xi = x - vt, t, r = vt) \\ &+ \left[2v \frac{\partial}{\partial t} + (-v^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial \xi} + (v^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial r} \right] f(\xi = x + vt, t, r = vt) \\ &- 2a^2 \frac{\partial}{\partial r} f(\xi = x, t, r = 0). \end{aligned} \right.$$

Cette équation doit être satisfaite quels que soient x et t . Examinons le premier terme du second membre et supposons pour un instant que la fonction soumise au signe $\int$ ne soit pas nulle. Par hypothèse, $f(t, r)$ est une fonction déterminée quand $F(t)$ est donnée; mais cette dernière fonction, rien n'empêche de la donner à volonté pour chaque point ξ intérieur au segment d'intégration qui s'étend de $x - vt$ à $x + vt$. L'équation (I)' ne saurait être alors satisfaite, puisque le premier terme dépendrait de la distribution des valeurs de $F(\xi, t)$ à l'intérieur du champ d'intégration, tandis que les autres termes n'en dépendent pas. Ainsi, il faut que $f(\xi, t, r)$ soit, pour tous les points ξ , une solution de l'équation

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) f = 0.$$

De même, si $v^2 - a^2$ était différent de zéro, rien n'empêcherait

de donner à $\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi = x - vt, t, r = vt)$ telle valeur qu'on voudrait sans rien changer aux autres termes de l'équation. Celle-ci ne peut donc être satisfaite que si l'on a

$$v = a.$$

La *vitesse de propagation est égale à a*. C'est le résultat de M. Poincaré.

Enfin on trouve, par un raisonnement tout semblable, que l'équation (I)' fournit encore les conditions

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial r} \right) f(\xi = x - at \text{ ou } x + at, t, r = at) = 0, \\ - 2a^2 \frac{\partial}{\partial r} f(x, t, r = 0) = F(x, t).$$

Ces équations doivent avoir lieu pour toutes les valeurs de x . Je supprimerai désormais l'écriture des lettres ξ et x qui n'interviendront plus dans le calcul et j'écrirai ces équations

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial r} \right) f(t, r = at) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} f(t, r = 0) = - \frac{1}{2a^2} F(t). \end{cases}$$

La première s'écrit encore

$$0 = \frac{d}{dt} f(t, at),$$

d'où

$$(3) \quad f(t, at) = \text{const.} = f(0, 0).$$

Ces équations ne suffisent pas encore à exprimer les conditions du problème : il faut encore que la fonction $U(x, t)$ satisfasse aux conditions initiales, savoir

$$\left. \begin{aligned} U(x, t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} U(x, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } t = 0.$$

Or la fonction

$$U(x, t) = \int_{x-at}^{x+at} f(\xi, t, r) d\xi$$

est nulle pour $t = 0$, puisque le champ de l'intégration est alors nul. Quant à $\frac{dU}{dt}$, calculée plus haut, elle se réduit, pour cette

valeur de t , à

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 2a f(x, 0, 0).$$

Ainsi, la constante $f(0, 0)$ qui figure dans l'équation (3) doit être nulle. En résumé, les conditions du problème se réduisent à celle-ci :

f est la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right) f = 0$$

qui satisfait aux conditions aux limites suivantes

$$(2) \quad \begin{cases} f(t, at) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} f(t, r=0) = -\frac{1}{2a^2} F(t). \end{cases}$$

Si, en particulier, on suppose $k=0$, ces équations donnent

$$f(t, r) = \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{r}{a}} F(\theta) d\theta.$$

Lorsque k est différent de zéro, la solution $f(t, r)$ des équations (1), (2) est plus difficile à obtenir, mais elle a une existence certaine et unique. On peut en trouver un développement en série par la méthode d'approximations successives de M. Picard⁽¹⁾, en partant de la solution que je viens d'indiquer pour $k=0$. Le problème proposé est donc entièrement résolu par la formule

$$U = \int_{x-at}^{x+at} f(\xi, t, r) d\xi.$$

La méthode employée ici est très générale. Elle s'étend d'abord à l'espace à trois dimensions⁽²⁾, puis, d'autre part, à des cas où les équations du mouvement renfermeraient des termes proportionnels aux vitesses. Elle a donc un grand intérêt en Physique mathématique.

(1) *Journal de Mathématiques*, 1890. Chap. II.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIX, p. 1003, déc. 1894.

SUR LES RACINES PRIMITIVES ⁽¹⁾

(Suite et fin);

Par M. FROLOV.

10. Nommons s le nombre de termes de la chaîne qui commence par le groupe $[1]$.

Il est facile de démontrer :

1° Que la seconde chaîne ouverte, qui n'existe que pour les modules de la forme $m = 8q + 1$, où q est un nombre entier quelconque, a le même nombre de termes, c'est-à-dire s termes;

2° Que toute chaîne fermée a deux fois plus de termes, c'est-à-dire $2s$ termes;

3° Qu'il suffit d'avoir la première chaîne ouverte, pour reconnaître de suite le nombre f de chaînes fermées, qui est donné par les formules

$$f = \frac{m-1-s}{2s}, \quad f = \frac{m-1-2s}{2s},$$

suivant qu'il n'y a qu'une seule chaîne ouverte ou qu'il y en a deux;

4° Que la première chaîne ouverte englobe tous les résidus d'un certain degré dont l'exposant j est donné par la formule

$$j = \frac{m-1}{s}.$$

Cet exposant j joue un grand rôle dans la recherche des racines primitives; s'il est composé, on déterminera tous ses diviseurs $d_1, d_2, d_3, \dots$.

Pour découvrir une ou quelques racines primitives, de n'importe quel module m , on n'a besoin de construire qu'une seule chaîne, celle qui se déploie au moyen du groupe $[1]$ et que nous appellerons *chaîne principale*. Il est inutile de construire les autres chaînes et même de s'en occuper.

(¹) Le Mémoire, inséré sous ce titre dans le n° 7 du tome XXI du *Bulletin de la Société mathématique de France*, en 1893, étant inachevé, nous avons repris notre travail, et nous présentons maintenant cette Note supplémentaire, qui complète ledit Mémoire.

11. En déployant une chaîne au moyen du groupe $[1]$, on ne peut pas prévoir si elle s'arrêtera avant d'avoir englobé tous les $(m-1)$ termes et ne sera pas unique, excepté un seul cas, celui où le module est de la forme $m = 8q + 1$; alors les nombres 2 et -2 sont des résidus quadratiques et la chaîne ne peut pas être unique.

Quand on a un module de cette forme, ou bien un module d'une forme quelconque, pour lequel $(m-1)$ n'a qu'un seul facteur impair, si la chaîne ne s'arrête pas d'elle-même, il faut la continuer jusqu'à ce qu'elle englobe $\frac{m-1}{2}$ termes; si elle ne s'arrête pas là, elle englobera évidemment tous les $m-1$ termes et sera unique. Mais quand on a un module n'appartenant pas à la forme $m = 8q + 1$, pour lequel $(m-1)$ a deux ou plusieurs facteurs impairs, dont le plus petit est p , on pourra arrêter la chaîne après avoir atteint $\frac{m-1}{p}$ termes. Par exemple pour

$$m = 71 = 2 \cdot 5 \cdot 7 + 1,$$

on a $p = 5$, et par suite on arrêtera la chaîne après avoir englobé $\frac{70}{5} = 14$ termes.

Si la chaîne s'arrête d'elle-même, elle sera la chaîne principale et tous ses s termes seront résidus du degré $j = \frac{m-1}{s}$. Outre cela, certains de ses termes seront résidus d'autres degrés, marqués par des exposants premiers avec j , tandis que les autres termes ne le seront pas. On le déterminera facilement, car les termes 1 et -1 sont résidus de tous les degrés impairs; pour $m = 4h + 1$ ils sont aussi résidus quadratiques; pour $m = 4h - 1$ le terme 1 est résidu et le terme -1 est non-résidu quadratique. Si l'on assigne à tous les groupes, en commençant par celui qui contient les termes 2 et -2 , des numéros d'ordre 1, 2, 3, 4, ..., les groupes qui portent les n^{os} $p, 2p, 3p, \dots$ seront composés de résidus d'un degré impair p . Quant aux résidus quadratiques, pour $m = 4h + 1$ ils composeront les groupes aux numéros pairs 2, 4, 6, ...; et pour $m = 4h - 1$, si la chaîne est terminée par le groupe $[e]$, ce sont les deux premiers termes de tous les groupes qui seront résidus quadratiques, et si la chaîne est

terminée par le groupe $[u]$, dans les groupes aux numéros impairs 1, 3, 5, ... ce sont les deux derniers termes, et dans les groupes aux numéros pairs 2, 4, 6, ... ce sont les deux premiers termes qui seront résidus quadratiques.

La composition de la chaîne principale étant de cette manière complètement déterminée, on passera à la recherche des racines primitives.

Pour cela on déterminera d'abord tous les diviseurs $d_1, d_2, d_3, \dots$ de l'exposant j , et puis on prendra, parmi les petits nombres 3, 5, 6, 7, ... qui ne figurent pas dans la chaîne, un nombre quelconque t et l'on calculera ses résidus de tous les degrés marqués par ces diviseurs : $t^{d_1}, t^{d_2}, \dots$, que nous appellerons *résidus partiels* de t . Si l'un d'eux t^d se trouve dans la chaîne, cela indiquera que t n'est pas une racine primitive, car on aura la congruence $t^d \equiv x^j$ ou $t \equiv x^{\frac{j}{d}}$, qui exprime que t est résidu du degré $\frac{j}{d}$ d'un certain nombre x . Si aucun des résidus partiels n'entre dans la chaîne, on observera si le résidu t^j , qui sera nommé *résidu principal* et qui se trouve nécessairement dans la chaîne, n'est résidu d'aucun degré dont l'exposant p est premier avec j . S'il l'est, cela indiquera évidemment que t est lui-même résidu du degré p et que, par conséquent, il n'est pas une racine primitive. Au contraire, si t n'est résidu d'aucun degré autre que celui qui est marqué par l'exposant j , il est une racine primitive.

12. Éclaircissons l'application de cette méthode par quelques exemples :

1° Soit proposé le module $m = 89 = 2^3 \cdot 11 + 1$.

On construit la chaîne principale

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{N}^\circ 1. & & \text{N}^\circ 2. \\
 & & \overbrace{\hspace{2cm}} & & \overbrace{\hspace{2cm}} \\
 1, & 1, & 88, & 88; & 2, & 45, & 44, & 87; & 4, & 67, & 22, & 85; \\
 & & \text{N}^\circ 3. & & \text{N}^\circ 4. & & \text{N}^\circ 5. \\
 & & \overbrace{\hspace{2cm}} & & \overbrace{\hspace{2cm}} & & \overbrace{\hspace{2cm}} \\
 8, & 78, & 11, & 81; & 16, & 39, & 50, & 73; & 32, & 64, & 25, & 57;
 \end{array}$$

qui contient 22 termes. Donc $s = 22$, et $j = \frac{88}{22} = 4$. Ce dernier n'a qu'un seul diviseur $d = 2$.

La chaîne ne contient pas les termes 3, 5, 6, 7, 10, ...

On a la chaîne principale

				N° 1.		N° 2.	
1,	1,	682,	682;	2,	342,	341,	681;
						4,	171,
						512,	679;
				N° 3.		N° 4.	
				8,	427,	256,	675;
				16,	555,	128,	667;
						32,	619,
						64,	651;

qui contient 22 termes. Donc $s = 22$ et $j = \frac{682}{22} = 31$, nombre premier.

La chaîne ne renferme pas 3, 5, 6, 7, ...

Le résidu principal de 3 est $3^{31} \equiv 1$, donc il est résidu des degrés 2 et 11, et 3 n'est pas une racine primitive.

Le résidu principal de 5 est $5^{31} \equiv 427$; il se trouve dans le groupe n° 3 et n'est pas résidu des degrés 2 et 11, donc 5 est une racine primitive de 683.

Ces exemples éclaireissent suffisamment l'application de la nouvelle méthode et nous espérons que l'on reconnaîtra qu'elle est plus simple et moins laborieuse que les autres méthodes connues.

ERRATA

du Mémoire *Sur les racines primitives*, inséré dans le tome XXI du *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1893.

1° Page 113, ligne 3 en remontant, *au lieu de* : $r = -\frac{m+x^2}{4}$, *lisez* : $r = \frac{m+x^2}{4}$.

2° Page 123, lignes 6-8, *au lieu de* : car le groupe central de ces chaînes est composé de résidus de tous les degrés impairs, et les groupes composés ..., *lisez* : car le groupe central de ces chaînes, qui existe si h n'est pas divisible par 4, est composé de résidus de tous les degrés impairs; s'il n'existe pas, les deux groupes du milieu sont composés de racines primitives; les deux groupes extrêmes le sont dans les deux cas, et parce que les groupes composés ...

3° Page 124, ligne 3 en remontant, *au lieu de* : Pour les modules de la forme $m = 6N + 1$, où N est ..., *lisez* : Pour les modules des formes $m = 6N + 1$ et $m = 12N + 1$, où N est ...

ERRATA.

Page 201, ligne 12 en remontant, *au lieu de* : coterons, *lisez* : substituerons.

Page 203, ligne 17, *au lieu de* : définie, *lisez* : défini.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	IV
Liste des Sociétaires perpétuels.....	V
État de la Société mathématique au commencement de 1894.....	VI
Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	XV
 H9d. — Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité; par M. ÉMILE PICARD.....	 2
O6l. — Sur les géodésiques spéciales des surfaces harmoniques; par M. RAFFY.....	8
L ² 48a, M ⁵ iz. — Nouvelle contribution au problème du huitième point commun à trois quadriques. Son identité avec un problème plan; par M. PICQUET.....	19
R7b β . — Sur un mouvement particulier d'un point dans le plan; par M. KÖNIGS.....	25
P2a. — Sur les courbes autopolaires par rapport à une conique donnée; par M. APPELL.....	27
Q4b α . — Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques; par M. LAISANT.....	28
O6k. — Note sur des couples de surfaces applicables; par M. E. GENTY...	36
M ⁵ h. — Sur les tangentes à une cubique plane; par M. GOURSAT.....	45
O6k. — Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution; par M. DEMOULIN.....	47
H40b. — Note sur les intégrales de M. Schwarz; par M. ANDRADE.....	50
H4a, H5d. — Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires; par M. ÉMILE PICARD.....	52
O4g α . — Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices; par M. ANTONARI.....	58
O6lz. — Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé); par M. RAFFY.	63
H9e α . — Remarque sur le théorème de M. Montard; par M. FEHR.....	67
G4d α . — Sur la réduction du nombre des périodes d'une fonction périodique; par M. ZAREMBA.....	68
H5j α . — Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension; par M. BURKHARDT.....	71

	Pages.
k4. — Résumé d'un Mémoire sur la détermination d'un triangle au moyen des longueurs de ses bissectrices; par M. BARBARIN.....	76
R7b β . — Sur quelques cas de discontinuité en Mécanique; par M. L. LECORNU.	81
O61z. — Recherches sur les surfaces harmoniques (résumé) (<i>suite et fin</i>): par M. RAFFY.	84
O5e. — Démonstration des formules fondamentales de la périmorphie et des formules de Codazzi; par M. BALITRAND.....	97
H9e. — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par certaines conditions aux limites; par M. ÉMILE PICARD.....	103
O6g. — Sur les surfaces à courbure totale constante; par M. E. GENTY...	106
O6m. — Sur les surfaces admettant pour lignes de courbure deux séries de cercles géodésiques orthogonaux; par M. PAUL ADAM.....	110
B4a. — Note sur une identité entre certains déterminants; par M. P. PAINLEVE.....	116
O6k. — Sur le problème général de la déformation des surfaces; par M. L. RAFFY.....	119
H5jz. — Sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre; par M. P. VERNIER.....	133
R8e. — Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes; par M. P. PAINLEVÉ... ..	136
R7g. — Sur une propriété mécanique des lignes géodésiques; par M. J. ANDRADE.....	186
R6a γ . — Sur le théorème des aires; par M. APPELL.	190
R6a γ . — Sur la rotation d'un système déformable; par M. ÉMILE PICARD.	195
X3. — Abaque en points isoplèthes de l'équation de Képler; par M. M. D'OCAGNE.....	197
O5h. — Sur l'équation d'Euler et les lignes de courbure de l'ellipsoïde; par M. PAUL ADAM.....	205
P4a. — Sur une méthode de transformation et sur la réduction des singularités d'une courbe algébrique; par M. E. VESSIOT.	208
R6a γ . — Propriété du mouvement d'un point matériel dans l'espace; par M. LAISANT.	217
O5d. — Nouvelle démonstration d'une propriété de l'indicatrice; par M. MANNHEIM.....	219
O6k. — Note sur la déformation infinitésimale des surfaces; par M. E. GENTY.....	221
E4d. — Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler; par M. E. CAHEN.....	227
A4a. — Sur un théorème de M. Bertrand; par M. CARTAN.....	230
H9d. — Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles de la Physique mathématique; par M. CARVALLO.	234
I7a. — Sur les racines primitives; par M. FROLOV.....	241
Errata.	246
Table des matières du tome XXII.	247

FIN DE LA TABLE DU TOME XXII.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

BULLETIN



DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME VINGT-TROISIÈME. — ANNÉE 1895.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—
1895

✓

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.	
1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAIMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHE.
1884	PICARD.

MM.	
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	DÉSIRÉ ANDRÉ.
1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

- BENOIST, docteur en droit, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire).
BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
BIOCHE, professeur de mathématiques, à Paris.
BISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, à Paris.
BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, à Bar-le-Duc (Meuse).
CANET, ingénieur civil, à Paris.
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, à Paris.
FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Paris.
GAUTHIER-VILLARS, imprimeur-éditeur, à Paris.
HALSTED, professeur à l'Université, à Austin (Texas).
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, à Paris.
HERMITE, membre de l'Institut, à Paris.
LÉAUTÉ, membre de l'Institut, à Paris.
JORDAN, membre de l'Institut, à Paris.
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, à Paris.
DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico.
MERCEREAU, licencié ès sciences mathématiques, à Paris.
D'OCAGNE, répétiteur à l'École Polytechnique, à Paris.
PEROTT (Joseph), à Worcester (Massachusetts).
PERRIN, ingénieur en chef des mines, au Mans (Sarthe).
POINCARÉ, membre de l'Institut, à Paris.
POLIGNAC (prince C. DE), à Grasse (Alpes-Maritimes).
RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris.
SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).
TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, à Paris.
TARRY, inspecteur des contributions diverses, à Alger.
-

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1895 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	{	MM. BERTRAND. CREMONA. DARBOUX. HERMITE. JORDAN.
----------------------------------	---	--

Président..... MM. GOURSAT.

Vice-Présidents	{	DE COMBEROUSSE. KOENIGS. PICARD. POINCARÉ.
-----------------------	---	---

Secrétaires	{	CARVALLO. RAFFY.
-------------------	---	---------------------

Vice-Secrétaires.....	{	L. LÉVY. PAINLEVÉ.
-----------------------	---	-----------------------

Archiviste..... BIOCHE.

Trésorier..... CLAUDE-LAFONTAINE.

Membres du Conseil ⁽²⁾	{	ANDRÉ, 1896. APPELL, 1897. FOURET, 1896. GUYOU, 1898. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, 1897. HUMBERT, 1898. LAISANT, 1898. MANNHEIM, 1897. D'OCAGNE, 1898. PICQUET, 1897. ROUCHÉ, 1896. VICAIRE, 1896.
---	---	---

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(²) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris.
1893. ADAM (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, avenue de Villars, 2, à Paris.
1881. AMIGUES, professeur au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1894. ANDRADE, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Poullain-Dupare, 7, à Rennes (Ille-et-Vilaine).
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences mathématiques, rue Gay-Lussac, 17, à Paris.
1890. ANTONARI, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Carnot, boulevard Malesherbes, 141, à Paris.
1879. APPELL, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Le Verrier, 6, à Paris.
1892. ARNOUX (G.), ancien officier de marine, aux Mées (Basses-Alpes).
1881. ASTOR, professeur à la Faculté des Sciences, place Victor-Hugo, 11, à Grenoble (Isère).
1882. AUTONNE, ingénieur des ponts et chaussées, place d'Helvétie, 7, à Lyon (Rhône).
1894. BALITRAND, lieutenant du génie, à Montpellier (Hérault).
1886. BARBERENA, ingénieur topographe, à San-Salvador.
1889. BEGHIN (Maurice), ancien élève de l'École Polytechnique, rue de Bourgogne, 40, à Paris.
1874. BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
1873. BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, rue de Tournon, 4, à Paris.
1872. BIENAYMÉ (Arthur), directeur du matériel au Ministère de la Marine, à Paris.
1888. BIOCHE, professeur au collège Stanislas, rue Vavin, 5, à Paris.
1875. RISCHOFFSHEIM, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris.
1890. BJERKNES, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1891. BLUTEL, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée Condorcet, rue Claude-Bernard, 65, à Paris.
1892. BONAPARTE (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris.
1886. BRAULT (A.), boulevard de Toulouse, 362, à Bordeaux (Gironde).
1874. BRIOSCHI, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
1872. BRISSE (Ch.), professeur à l'École Centrale, rue Vanquelin, 18, à Paris.
1873. BROCARD, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc (Meuse).
1886. BRUNEL, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux (Gironde).
1893. BURKHARDT, privat-docent à l'Université, Grüner Weg, 4, à Göttingue (Allemagne).
1894. CAHEN, professeur au lycée Lakanal, avenue d'Orléans, 23, à Paris.
1893. CALDARERA, professeur à l'Université, via Macqueda, 230, à Palerme (Italie).
1888. CAVET (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie à la Société des Forges de la Méditerranée, rue Vignon, 3, à Paris.
1885. CARON, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, avenue de Villiers, 10, à Paris.
1887. CARVALLO, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Courty, 1, à Paris.
1887. CASPARY, professeur à l'École d'Architecture, Genthinerstrasse, 42, à Berlin (Allemagne).

- Date
de
l'admission.
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny, née de Lagerborg), à Helsingfors (Finlande).
 1892. CELLÉRIER (Gustave), boulevard de Port-Royal, 48, à Paris.
 1887. CERRUTI, professeur à l'Université, à Rome (Italie).
 1888. CHAILAN (Edouard), rue Berthollet, 14, à Paris.
 1893. CHARLIAT, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris.
 1881. CHEMIN, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue de l'Alma, 12, à Paris.
 1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
 1875. CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris.
 1872. COLLIGNON, inspecteur général des ponts et chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
 1890. COLOT, villa Sully, à Arcachon (Gironde).
 1875. COMBEROUSSE (DE), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École Centrale, rue Saint-Lazare, 94, à Paris.
 1872. COURCELLES, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
 1884. CRAIG (Thomas), professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
 1877. CREMONA, sénateur du royaume d'Italie, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome (Italie).
 1872. DARBOUX, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
 1885. DAUTHIVILLE, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
 1881. DEFFORGES, chef de bataillon d'infanterie, attaché à l'État-major du Ministre de la Guerre, boulevard Latour-Maubourg, 41, à Paris.
 1882. DELANNOY, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).
 1885. DEMARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, à Lille (Nord).
 1892. DEMOLIN (Alph.), docteur en sciences mathématiques et physiques, répétiteur à l'Université, rue du Soleil, 8, à Gand (Belgique).
 1883. DERUYTS, docteur ès sciences, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
 1894. DESAINT, place Corneille, 10, à Levallois-Perret (Seine).
 1886. DUNCAN, professeur à l'Université John Hopkins, à Baltimore (États-Unis d'Amérique).
 1872. DURRANDE, doyen de la Faculté des Sciences, à Poitiers (Vienne).
 1885. DYCK (Walther), professeur au Polytechnicum, à Munich (Bavière).
 1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, à Montpellier (Hérault).
 1891. FAUCQEMBERGUE, professeur au collège de Parthenay (Deux-Sèvres).
 1892. FEHR (Henri), licencié ès sciences mathématiques, rue des Alpes, 6, à Genève (Suisse).
 1885. FIELDS (John), professeur de mathématiques, Friedländerweg, 31, à Göttingue (Allemagne).
 1893. FLEURY, ancien chef d'institution, rue de la Santé, 46, à Paris.
 1881. FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Saint-Lambert, 17, à Nancy (Meurthe-et-Moselle).
 1872. FLYE SAINT-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
 1891. FONTVIOLENT (DE), professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris-Auteuil.
 1889. FOUCHÉ, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris.
 1872. FOURET, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.

Date
de
admission.

1892. FROLOY (le général), quai Pierre-Fatio, 10, à Genève (Suisse).
1872. GARIEL, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris.
1872. GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.
1890. GEBBIA, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1872. GENTY (E.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Oran (Algérie).
1890. GENTY (Max), enseigne de vaisseau, en escadre, à Toulon (Var).
1892. GENTY (Paul), hôtel Saint-Sulpice, rue Casimir-Delavigne, 7, à Paris.
1893. GÉRARD, docteur ès sciences, professeur au lycée de Lyon.
1890. GERBALDI, professeur à l'Université, à Palerme (Italie).
1881. GOURSAT, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard Arago, 112, à Paris.
1872. GRAINDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 102, à Liège (Belgique).
1880. GUCCIA (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Italie).
1891. GUIMARAES, officier du génie, rue Garret, 61, à Lisbonne (Portugal).
1881. GUNTHER (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. GUYOU, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris.
1873. HAAG, ingénieur en chef des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
1882. HABICH, directeur de l'École des mines, à Lima (Pérou).
1894. HALSTED, professeur à l'Université du Texas, Guadalupe Street, 2407, à Austin (Texas).
1872. HATON DE LA GOUPILLIÈRE, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, boulevard Saint-Michel, 60, à Paris.
1872. HENRY, inspecteur général des ponts et chaussées, boulevard St-Germain, 22, à Paris.
1882. HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Jean-de-Beauvais, 2, à Paris.
1892. HERMANN, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris.
1873. HERMITE, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.
1893. HIOUX, professeur en retraite, rue des Fossés Saint-Jacques, 16, à Paris.
1879. HOLST (Elling), professeur à l'École Polytechnique, Pilestrade, 49, à Christiania (Norvège).
1872. HOUBIGANT, chef de bataillon du génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
1872. HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
1880. HUMBERT, ingénieur des mines, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de l'Arcade, 24, à Paris.
1881. IMBER, directeur des études à l'École Centrale, rue Montgolfier, 1, à Paris.
1887. ISSALY (l'abbé), rue Margaux, 16, à Bordeaux (Gironde).
1873. JAXIV, chef d'escadron au 15^e régiment d'artillerie, à Douai (Nord).
1872. JAVARY, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris.
1889. JOXQUIÈRE (Alfred), docteur en philosophie, rue Fédérale, 10, à Berne (Suisse).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varenne, 48, à Paris.
1872. JOUFFRET, lieutenant-colonel d'artillerie, à Bourges (Cher).
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Principe Umberto, 7, à Milan (Italie).
1890. KÖBB (Gustaf), maître de conférences à l'Université de Stockholm (Suède).

Date
de
l'admission.

1892. KOCH (H. von), maître de conférences à l'Université, Eugelbrektskatan, 43 B, à Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, maître de conférences à l'École Normale supérieure, boulevard de Port-Royal, 72, à Paris.
1881. LACOR, professeur de mathématiques, boulevard du Mont-Parnasse, 96, à Paris.
1873. LAISANT, docteur ès sciences mathématiques, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris.
1893. LANCELIN, boulevard Arago, 97, à Paris.
1875. LAQUIÈRE, ancien capitaine d'artillerie, rue Edgard-Quinet, 19, à Mustapha (Algérie).
1873. LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris.
1893. LECORNU, ingénieur en chef des mines, boulevard du Mont-Parnasse, 12, à Paris.
1872. LEMOINE (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, rue Littré, 5, à Paris.
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1891. LERY, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).
1872. LESPIAULT, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, à Nérac (Lot-et-Garonne).
1882. LÉVY (Lucien), examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 29, à Paris.
1872. LÉVY (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1873. LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Georgenstrasse, 40, à Munich (Bavière).
1886. LIÈVILLE, ingénieur des poudres, répétiteur à l'École Polytechnique, rue des Écoles, 6 bis, à Paris.
1880. LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 186, à Paris.
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Freycinet, 26, à Paris.
1886. LYON, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseaie, 26, à Genève (Suisse).
1882. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, boulevard Saint-Michel, 14, à Paris.
1875. MALLOIZEL, professeur de mathématiques, rue de l'Estrapade, 7, à Paris.
1892. MANGEOT, docteur ès sciences mathématiques, quai des Comtes de Champagne, 29, à Troyes (Aube).
1872. MANNHEIM, colonel d'artillerie en retraite, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris.
1884. MARTIN (Artemas), U. S. Coast and geodesic Survey Office, Washington D. C. (Etats-Unis d'Amérique).
1889. MARTIN (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue du Mont-Parnasse, 25, à Paris.
1893. MATHÉ, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).
1890. MASSIEU, inspecteur général des mines, avenue d'Antin, 18, à Paris.
1894. MALPIN, répétiteur au lycée, à Nantes (Loire-Inférieure).
1889. MEXDIZABAL TAMBORÉL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, rue Gay-Lussac, 49, à Paris.
1893. MICHEL, lieutenant du génie, à Montpellier (Hérault).

Date
de
l'admission

1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
1872. MOUTARD, inspecteur général des mines, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
1888. MUKHOPADHYAY (Asutosh), professeur de Mathématiques, Russa Road, 77, North Bhowanipore, à Calcutta (Inde).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1882. OCAGNE (n'), ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Vienne, 5, à Paris.
1873. OVIDIO (Enrico n'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).
1893. PAINLEVÉ, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Rennes, 99, à Paris.
1888. PAPELIER (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).
1884. PARAF, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1872. PARMENTIER, général du génie en retraite, rue du Cirque, 5, à Paris.
1872. PARRAN, ingénieur en chef des mines, rue des Saints-Pères, 56, à Paris.
1884. PAUTOXNIER (l'abbé), professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 19, à Paris.
1881. PELLET, doyen de la Faculté des Sciences, rue Ballainvilliers, 7, à Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme).
1883. PELLETREAU, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Constantine (Algérie).
1874. PERCIN, lieutenant-colonel d'artillerie, inspecteur des manufactures d'armes, rue de Vaugirard, 20, à Paris.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts).
1873. PERRIN, ingénieur en chef des mines, rue Erpell, 5, au Mans (Sarthe).
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Lamandé, 7, à Paris.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, rue Soufflot, 13, à Paris.
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue de Condé, 24, à Paris.
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
1882. POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohême).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).
1877. POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers (Vienne).
1877. PRESLE (DE), sous-intendant militaire en retraite, rue Monge, 82, à Paris.
1872. PUTZ, général d'artillerie en retraite, rue Saint-Merry, 98, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
1893. QUINTARD, professeur de mathématiques, boulevard Exelmans, 112, à Paris.
1872. RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
1883. RAFFY, maître de conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure, rue Nicole, 7, à Paris.
1893. RIVENEAU (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).
1888. ROBIN (Gustave), docteur es sciences mathématiques, rue Chanoinesse, 2, à Paris.
1872. RODET, ingénieur des manufactures de l'État, quai d'Orsay, 63, à Paris.
1872. ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
1872. ROUCHÉ (Eugène), professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.

- Date
de
admission.
1885. ROUQUET, professeur de mathématiques spéciales au lycée, place de l'École-d'Artillerie, 2, à Toulouse (Haute-Garonne).
1872. ROUSSELIN, professeur au lycée Condorcet, rue du Rocher, 35, à Paris.
1881. SAINT-PAUL (DUCUR DE), lieutenant-colonel d'artillerie en retraite, rue Saint-Sauveur, 13, à Perpignan (Pyrénées-Orientales).
1889. SARAZ, professeur de mathématiques, rue Saint-Jacques, 220, à Paris.
1872. SARRAU, membre de l'Institut, ingénieur en chef des poudres, professeur à l'École Polytechnique, avenue Daumesnil, 9 bis, à Saint-Mandé (Seine).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).
1881. SCHLEGEL (Dr Victor), professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg (Russie).
1883. SIMART, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École Polytechnique, examinateur d'admission à l'École navale, place Possoz, 5, à Paris.
1881. STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de commerce, Deribasowskaja, 6, à Odessa (Russie).
1879. STEPHANOS (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).
1873. STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norwège).
1872. TANNERY (Paul), directeur des manufactures de l'État, square du Roule, 2, Paris.
1875. TANNERY (Jules), sous-directeur à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
1882. TARRY (Gaston), inspecteur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
1872. TERRIER, professeur au collège Chaptal, rue Larribe, 3, à Paris.
1872. TISSERAND, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire, à Paris.
1873. TISSOT, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).
1893. TOUCHE, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue de Téhéran, 24, à Paris.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées, boulevard Inkermann, 27, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1872. VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
1893. VALLÉE-POUSSIN (de la), chargé de cours à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).
1880. VANECEK (J.-S.), professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
1890. VASCHY, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Bosquet, 68, à Paris.
1876. VICARE, inspecteur général des mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
1888. VITO VOLTERRA, professeur à l'Université, à Pise (Italie).
1893. WAGNER, professeur à l'École J.-B. Say, rue Pierre Charron, 1, à Paris.
1880. WALCKENAER, ingénieur des mines, boulevard Saint-Germain, 218, à Paris.
1879. WEILL, professeur au collège Chaptal et à l'École Monge, 19, rue Thiers, au Vésinet (Seine-et-Oise).
1873. WEYR (Dr Edouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
1878. WORMS DE ROMILLY, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris.

Date
de
l'admission.

1882. ZABOUDSKY (colonel), professeur à l'Académie d'Artillerie, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, 27, rue Ménard, à Nîmes (Gard).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Ostersogade, 10, à Copenhague (Danemark).
-

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Hollande.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques</i> (rédauteur M. Coelingh, Stadhouderskade, 48).	Hollande.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics</i> , publié par l'Université John Hopkins (rédauteur M. Thomas Craig).	États-Unis d'Amérique.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Archiv für Mathematik und Physik</i> (rédauteur Dr Hoppe, Prinzenstrasse, 69. S. W.)	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik</i> (rédauteur Dr Lampe, Kurfürstenstrasse, 139).	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik</i> (rédauteur M. Fuchs, Kronprinzen Ufer, 24).	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Société philosophique de Cambridge.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab</i> , chez M. Gammeneyer, libraire, Carl Johans Gade, 33, à Christiania.	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas</i> (rédauteur M. Gomes Teixeira).	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik</i> (rédauteurs MM. Foldberg et Juel).	Danemark.
Cracovic.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Ecole Polytechnique de Delft.	Hollande.
Dresde.....	<i>Zeitschrift für Mathematik und Physik</i> (rédauteur Dr Oscar Schlömilch).	Allemagne.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis</i> (rédauteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).	Belgique.
Goettingue.....	Société Royale des Sciences de Goettingue.	Allemagne.
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Russie.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.

Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen</i> (rédacteur M. Félix Klein, à Goettingue).	Allemagne.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis d'Amérique.
Odessa.....	Société mathématique d'Odessa.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques</i> (rédacteurs MM. Darboux et J. Tannery).	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques élémentaires</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	<i>Journal de Mathématiques spéciales</i> (rédacteur M. G. de Longchamps).	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Prague.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pestování matematiky a fysiky</i> (rédacteur M. Edouard Weyr).	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Prague.	Autriche.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei.</i>	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm.....	<i>Acta Mathematica</i> (rédact. M. Mittag-Leffler).	Suède.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.</i>	France.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Venise.....	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik</i> , (rédact. M. Escherich).	Autriche.
Zurich.....	Société des Sciences naturelles de Zurich.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 9 JANVIER 1895.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

La Société procède, en Assemblée générale, au renouvellement de son bureau et à l'élection de quatre membres du Conseil.

Sur la proposition de M. Laisant, l'Assemblée, prenant en considération l'étude d'un projet d'organisation de Congrès mathématiques internationaux, renvoie au Conseil de la Société l'examen de ce projet.

Communications :

M. Lancelin : *Sur les lignes géodésiques des surfaces minima.*

M. MANNHEIM adresse la Communication suivante :

Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

A la fin de l'intéressante Communication qu'il a faite à la Société mathématique de France ⁽¹⁾, M. Paul Adam dit : *Sur ces ellipsoïdes, les lignes de courbure se correspondent avec parallélismes des plans tangents.*

Prenons alors deux surfaces du second ordre (S), (S'), sur les-

(1) Voir *Bulletin*, tome XXII, page 208.

quelles on a les lignes de courbure C, C' qui se correspondent avec parallélisme des plans tangents à (S) et (S') .

Circonscrivons à (S) le long de C une surface développable. Appelons mg, mt la génératrice de cette surface et la tangente à C pour le point m de cette courbe. Sur C' au point m' , correspondant à m , soient de même $m'g', m't'$ la génératrice de la surface développable circonscrite à (S') le long de C' et la tangente à cette courbe.

Les plans tangents à ces deux surfaces développables successivement aux points correspondants sur $(S), (S')$ étant parallèles, les droites $mg, m'g'$ sont parallèles et, par suite, comme leur étant respectivement perpendiculaires, dans des plans parallèles, les droites $mt, m't'$ sont aussi parallèles. Ainsi :

Sur $(S), (S')$ les lignes de courbure se correspondent avec parallélisme de leurs tangentes.

Les axes de la section faite dans (S) par un plan parallèle au plan tangent en m sont parallèles à mg, mt . De même pour (S') coupée par un plan parallèle au plan tangent en m' . Mais les plans tangents en m, m' sont parallèles et les droites mg, mt sont parallèles à $m'g', m't'$, donc :

La section faite dans (S) par un plan arbitraire et la section faite dans (S') par un plan parallèle à celui-ci sont des courbes dont les axes sont parallèles. De là, on peut conclure que les plans des sections circulaires de (S) et de (S') sont parallèles.

Je vais démontrer directement cette propriété. Comme on peut transporter (S) ou (S') parallèlement à elle-même sans altérer la propriété relative aux lignes de courbure de ces surfaces, supposons qu'elles aient même centre o . De ce point comme centre décrivons une sphère. Elle coupe (S) suivant une courbe que nous prenons comme directrice d'un cône de sommet o . Les génératrices de ce cône rencontrent à angle droit cette directrice et alors un plan tangent à ce cône détermine dans (S) une section qui a pour axe la génératrice de contact de ce plan tangent.

Ce cône coupe (S') suivant une courbe qui doit rencontrer cette génératrice à angle droit puisque, d'après ce qui précède, cette

génératrice est un axe de la section faite dans (S') par le même plan tangent au cône. Il résulte de là que le cône coupe (S') suivant une ligne sphérique.

Parmi les sphères de centre o , prenons celle qui coupe (S) suivant deux cercles. Le cône précédent se réduit alors à deux plans; ceux-ci, devant couper (S') suivant une ligne sphérique, la coupent suivant deux cercles.

On voit ainsi que les plans qui coupent (S) suivant des cercles coupent aussi (S') suivant des cercles. Mais, comme on peut prendre des surfaces homothétiques à (S) et (S') et les transporter ensuite parallèlement à elles-mêmes sans altérer la propriété qui a servi de point de départ, on peut dire :

Si des surfaces du second ordre sont telles que leurs lignes de courbure se correspondent avec parallélisme de leurs plans tangents, les plans de leurs sections circulaires sont parallèles.

Démontrons maintenant la propriété réciproque de celle-ci. Pour cela, je vais d'abord établir cette proposition :

Si des surfaces du second ordre passent par deux cercles ayant même diamètre, un plan arbitraire les coupe suivant des courbes dont les axes sont parallèles.

Appelons (Σ) la sphère qui contient ces deux cercles et (P) un plan sécant arbitraire.

Ce plan coupe les surfaces du second ordre suivant des coniques qui ont en commun les quatre points d'intersection de (P) et des deux cercles. Mais ces quatre points sont sur le cercle d'intersection de (P) et de (Σ) . Il suffit alors de prendre les bissectrices des angles formés par les diagonales du quadrilatère qui a ces quatre points pour sommets, afin d'obtenir les directions des axes des coniques passant par ces quatre points. Ces courbes ont donc des axes parallèles.

Aux surfaces qui interviennent dans cette proposition, on peut substituer des surfaces qui leur sont homothétiques et transporter celles-ci individuellement dans des directions arbitraires; on voit ainsi que :

Si des surfaces ont les mêmes directions pour les plans de leurs sections circulaires, elles sont coupées par des plans parallèles suivant des courbes dont les axes sont parallèles.

Prenons deux de ces surfaces (S) , (S') et sur (S) la ligne de courbure C . Circonscrivons à (S) une surface développable le long de C . Au point m de C la génératrice de cette surface est mg et la tangente à C est mt .

Circonscrivons à (S') une surface développable dont les plans tangents sont parallèles aux plans tangents de la surface circonscrite à (S) . Soit m' le point de contact avec (S') du plan tangent à cette surface qui est parallèle au plan tangent en m à (S) . La génératrice $m'g'$ de la surface développable circonscrite à (S') est parallèle à mg . Cette droite $m'g'$ est conjuguée de la tangente $m't'$ de la courbe de contact de (S') et de la surface développable qui lui est circonscrite.

Coupons (S) et (S') par un plan parallèle au plan tangent en m ou en m' . Les courbes d'intersection ont des axes parallèles; par suite $m'g'$ est parallèle à un axe de la section faite dans (S') par le plan sécant. La direction conjuguée de $m'g'$ lui est alors perpendiculaire; donc les génératrices de la surface développable circonscrite à (S') rencontrent à angle droit la courbe de contact de ces deux surfaces: cette courbe est donc une ligne de courbure de (S') . Nous pouvons alors dire:

Si les plans des sections circulaires de surfaces du second ordre sont parallèles, les lignes de courbure de ces surfaces se correspondent avec parallélisme des plans tangents.

M. LAISANT présente la Note suivante:

Sur les courbes gauches algébriques auto-corrélatives:

Par M. GIRO LORIA.

D'après Plücker⁽¹⁾, on considère, dans les courbes planes algébriques douées de singularités ordinaires, six nombres caractéristiques: l'ordre et la classe, les nombres de points doubles et de tangentes doubles, et les nombres de points d'inflexion et de rebroussement.

Ces caractéristiques sont évidemment corrélatives par couple;

(¹) *Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes* (Journal de Crelle, t. XII; 1834). *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn, 1839).

et M. Bioche ⁽¹⁾ a prouvé que, *en général*, l'égalité de deux nombres d'un même couple entraîne l'égalité des nombres des deux autres; il y a cependant quatre courbes particulières qui font exception.

D'après M. Cayley ⁽²⁾, on considère, dans les courbes gauches algébriques douées de singularités ordinaires, dix nombres caractéristiques. Ce sont avant tout l'ordre m de la courbe, le nombre a de ses points de rebroussement, le nombre c de ses points doubles apparents, y compris les points doubles effectifs s'il y en a, et l'ordre d de la courbe double de la développable osculatrice. Comme une courbe gauche est le noyau d'un système de points, plans et droites, il y a lieu de considérer quatre autres nombres, dont les définitions sont corrélatives à celles des nombres précédents et que nous désignerons respectivement par les lettres μ , α , γ , δ . On a encore deux nombres qui sont auto-corrélatifs : ce sont le rang R de la courbe et le nombre T des génératrices stationnaires de la développable correspondante.

Cela posé, le problème résolu par M. Bioche mène naturellement à se demander si, pour les courbes à double courbure, l'égalité de deux nombres corrélatifs entraîne l'égalité des autres. Essayons de répondre à cette question.

Rappelons, à cet effet, qu'entre les dix nombres définis ci-dessus ont lieu les six relations suivantes, que M. Cayley a découvertes :

$$\begin{aligned} \mu &= R(R-1) - 2d - 3(m+T), & m &= R(R-1) - 2\delta - 3(\mu+T), \\ R &= \mu(\mu-1) - 2\gamma - 3\alpha, & R &= m(m-1) - 2c - 3a, \\ m+T-\alpha &= 3(R-\mu), & \mu+T-a &= 3(R-m). \end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned} \mu - m &= d - \delta, \\ \alpha - a &= 2(\mu - m), \\ 2(\gamma - c) &= (\mu - m)(\mu + m - 7). \end{aligned}$$

Ces dernières égalités prouvent que l'une des égalités $\mu = m$, $\alpha = a$, $\delta = d$ entraîne les autres et même $\gamma = c$. Mais, si l'on part

⁽¹⁾ *Sur les singularités des courbes algébriques planes* (Bulletin de la Soc. Mathém., t. XX, p. 67; 1892).

⁽²⁾ *Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables* (Journal de Liouville, t. X, 1845; ou bien *The collected mathematical papers*, vol. I, p. 207-211; 1889).

de la supposition $\gamma = c$, on arrive à $\mu = m$ et ensuite à $\delta = d$, $\alpha = a$, ou bien à $\mu + m = 7$. On voit donc que l'égalité de deux nombres caractéristiques corrélatifs entraîne l'égalité des autres, excepté pour les courbes dont l'ordre et la classe ont pour somme 7. Or l'équation indéterminée

$$m + \mu = 7$$

a évidemment huit solutions. Il est clair que les solutions $(0, 7)$, $(1, 6)$, $(2, 5)$ ne correspondent à aucune courbe algébrique simple; on doit donc les exclure, ainsi que les solutions corrélatives $(7, 0)$, $(6, 1)$, $(5, 2)$. Restent les deux solutions $(3, 4)$ et $(4, 3)$. Or, on sait qu'une courbe gauche simple du troisième ordre est de la troisième classe; par conséquent, la solution $(3, 4)$ ne peut correspondre qu'à une courbe plane et précisément à une cubique plane douée de quatre points d'inflexion; mais une telle courbe n'existe pas ⁽¹⁾. On prouve de la même manière que la solution $(4, 3)$ ne peut correspondre à aucune courbe algébrique simple. Par conséquent, on peut énoncer ce théorème :

Dans toute courbe gauche algébrique, douée de singularités ordinaires, l'égalité de deux caractéristiques corrélatives entraîne l'égalité des trois autres couples analogues.

SÉANCE DU 23 JANVIER 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Painlevé : *Sur la transformation des équations de la Mécanique.*

M. Desaint : *Sur la théorie des fonctions.*

M. Humbert : *Sur l'extension du théorème de Poncelet à la surface de Kummer.*

M. Fouret : *Remarque sur une Communication récente de M. Mannheim.*

M. Humbert présente quelques observations sur le même sujet.

⁽¹⁾ Voir, par exemple, dans les *Vorlesungen über Geometrie* von A. CLEBSCH, I Band (Leipzig, 1876), le Tableau de la page 353.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE INFINITÉSIMALE DES ÉQUATIONS ET LES FONCTIONS IMPLICITES;

Par M. A. PELLET.

1. Nous dirons que les n premières racines d'une équation, $F(x) = 0$, sont *séparées dans le plan*, lorsque l'équation obtenue en y remplaçant chaque coefficient par son module à l'exception de celui de x^n qui est remplacé par une quantité négative de même module, équation qui offre deux variations de signe, a une racine positive simple r . Alors l'équation $F(x) = 0$ a n racines de modules inférieurs à r , et l'on peut former, d'une part, l'équation de degré n qui admet ces n racines, d'autre part, celle qui admet toutes les autres racines qui sont de modules supérieurs à r . Soit

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_ix^i + \dots$$

Posons

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n+1}x^{n+1} + \dots,$$

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \dots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n+1}x^{n+1} + \dots,$$

α_i étant le module de a_i . On a

$$F(x) = a_nx^n + f(x),$$

et les n premières racines de l'équation $F(x) = 0$ sont séparées dans le plan si la fonction $\alpha_nx^n - \varphi(x)$, qui est négative pour $x = 0$, est positive pour les valeurs positives de x comprises entre r et R , $R > r$. Il est clair qu'on peut remplacer dans $\varphi(x)$ les coefficients par des quantités positives supérieures et α_n par une quantité positive plus petite; si la nouvelle fonction est positive pour des valeurs positives de x , ces valeurs rendront *a fortiori* positive la première.

Pour les valeurs de x , dont le module est compris entre r et R , on a

$$l[a_nx^n + f(x)] = l a_nx^n + \frac{f(x)}{a_nx^n} - \frac{1}{2} \left[\frac{f(x)}{a_nx^n} \right]^2 + \dots$$

La série à double entrée du second membre est absolument

convergente et on peut l'ordonner suivant les puissances croissantes et décroissantes de x . Soit alors

$$lF(x) = la_n x^n + g_0 + g_1 x + \dots + g_i x^i + \dots + h_1 \frac{1}{x} + \dots + h_i \frac{1}{x^i} + \dots$$

Posons

$$G(x) = g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_i x^i + \dots,$$

$$H\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{h_1}{x} + \dots + \frac{h_i}{x^i} + \dots$$

La série $G(x)$ a un rayon de convergence égal ou supérieur à R , et $H\left(\frac{1}{x}\right)$ un rayon de convergence égal ou inférieur à r . Il vient, passant des logarithmes aux nombres

$$e^{-g_0} F(x) = a_n x^n e^{H\left(\frac{1}{x}\right)} e^{G(x)};$$

d'où

$$(1) \quad a_n x^n e^{H\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-g_0} F(x) e^{-G(x)},$$

$$(2) \quad e^{-g_0} F(x) e^{-H\left(\frac{1}{x}\right)} = a_n x^n e^{G(x)}.$$

Ces deux égalités ayant lieu pour toutes les valeurs de x de module compris entre r et R , les deux membres doivent être identiques dans chacune d'elles. Or, les seconds membres sont des séries holomorphes en x , les premiers ne contiennent donc des termes en $\frac{1}{x}$ qu'en apparence.

Les deux membres de l'égalité (1) sont des polynômes entiers de degré n en x ; en égalant à 0, on obtient l'équation qui admet les n premières racines de $F(x) = 0$; le produit de ces n racines est égal à

$$(-1)^n \frac{a_0}{a^n} e^{-g_0}.$$

Les deux membres de l'égalité (2) sont des séries holomorphes en x , le degré du terme de degré le moins élevé étant n ; égalant à 0 et supprimant le facteur x^n , on obtient une équation admettant toutes les autres racines de l'équation $F(x) = 0$, et réciproquement; le nombre de ces racines peut se réduire à 0, et leurs modules sont supérieurs à R .

Si les n_1 premières sont également séparées dans le plan, $n_1 > n$, on aura

$$a_{n_1} x^{n_1} e^{H_1\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{-g_1} F(x) e^{-G_1(x)},$$

$g_0^1, G_1(x), H_1\left(\frac{1}{x}\right)$ étant les valeurs correspondantes de $g_0, G(x), H\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit

$$a_{n_1} x^{n_1-n} e^{H_1\left(\frac{1}{x}\right)-H\left(\frac{1}{x}\right)} = a_n e^{g_0-g_0^1} e^{G(x)-G_1(x)},$$

et l'on a ainsi sous deux formes différentes, comme précédemment, l'équation de degré $n_1 - n$, qui admet les $n_1 - n$ racines nouvellement séparées.

2. Posons

$$a_n P(x) = a_{n+1} x + \dots + a_{n+i} x^i + \dots,$$

$$a_n Q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n+1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x},$$

$$a_n \pi(x) = a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \dots + a_{n+i} x^i + \dots,$$

$$a_n \gamma\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n+1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x}.$$

Le terme indépendant de x est nul dans $\frac{f(x)}{a_n x^n}$ et, par suite, est le même dans $\left[\frac{f(x)}{a_n x^n}\right]^i$ et $\left[\frac{f(x)}{a_n x^n}\right]^i - P^i(x) - Q^i\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit μ la valeur minimum de $\pi(x) + \gamma\left(\frac{1}{x}\right)$; le terme indépendant de x dans $\left[P(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right)\right]^i$ a un module plus petit que $\mu^i \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)$ et par suite, en prenant pour g_0 le terme indépendant de x dans

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} - \frac{1}{2} \left(\frac{f}{a_n x^n}\right)^2 + \dots + \frac{(-1)^i}{i-1} \left(\frac{f}{a_n x^n}\right)^{i-1},$$

on commet une erreur ε de module plus petit que $\frac{\mu^i}{i(1-\mu)} \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)$, et il en résulte, pour le produit des n premières racines, $(-1)^n \frac{a_0}{a_1} e^{-g_0}$, une erreur relative $e^\varepsilon - 1$, de module inférieur à

$$\frac{\mu^i}{i(1-\mu-\mu^i)} \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right).$$

Ainsi, pour n quelconque, on a

$$g_0 = - \frac{a_{n+1} a_{n-1} + a_{n+2} a_{n-2} + \dots + a_{2n} a_n}{a_n^2}, \quad |\varepsilon| < \frac{\mu^3}{4(1-\mu)}.$$

Pour $n = 2$:

$$\varepsilon_0 = -\frac{a_3 a_1 + a_4 a_0}{a_2^2} + \frac{a_5 a_0^2 + 2 a_5 a_0 a_1 + a_4 a_1^2 + a_0 a_3^2}{a_2^3}, \quad |\varepsilon| < \frac{\mu^4}{4(1-\mu)} \frac{7}{8}.$$

Pour $n = 1$:

$$\varepsilon_0 = -\frac{a_2 a_0}{a_1^2} + \frac{a_3 a_0^2}{a_1^3} - \frac{a_4 a_0^3 + \frac{3}{2} a_5 a_0^2}{a_1^4} + \frac{a_5 a_0^4 + 4 a_2 a_3 a_0^2}{a_1^5}, \quad |\varepsilon| < \frac{\mu^6}{6(1-\mu)} \frac{31}{32};$$

dans ce cas, on peut écrire, en ajoutant des termes qui se trouvent dans la suite des termes négligés avec des coefficients au moins égaux, de sorte que la limite de l'erreur est inférieure,

$$\varepsilon_0 = P \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) - \frac{3}{2} P^2 \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) + \frac{a_2 a_3 a_0^2}{a_1^5},$$

et il en résulte pour valeur de la première racine

$$-\frac{a_0}{a_1} \left[1 - P \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) + 2 P \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) - \frac{a_2 a_3 a_0^2}{a_1^5} \right]$$

avec une erreur relative de module plus petit que $\frac{\mu^6}{6(1-\mu-\mu^6)}$.

3. On a

$$e^{G(x)} = [1 + P(x)] e^{G(x)}, \quad e^{H\left(\frac{1}{x}\right)} = \left[1 + Q \left(\frac{1}{x} \right) \right] e^{H\left(\frac{1}{x}\right)},$$

$G(x)$ étant la partie contenant x à des puissances positives, et $H\left(\frac{1}{x}\right)$ la partie contenant x à des puissances négatives du développement de la série

$$\sum_{i=2}^{i=\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} [(P+Q)^i - P^i - Q^i],$$

ordonnée suivant les puissances croissantes et décroissantes de x . j étant un entier positif ou négatif, le coefficient de x^j dans

$$\left[P(x) + Q \left(\frac{1}{x} \right) \right]^i - P^i(x) - Q^i \left(\frac{1}{x} \right)$$

a un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho) \chi \left(\frac{1}{\rho} \right) \left[\pi(\rho) + \chi \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]^i}{\rho^j},$$

ρ étant compris entre r et R . Donc, dans $g(x)$ et $\mathcal{G}\left(\frac{1}{x}\right)$, le coefficient de x^j a un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho) \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1 - \pi(\rho) - \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)} \rho^{-j};$$

et par suite dans les fonctions $e^{\mathcal{G}(x)}$, $e^{\mathcal{G}\left(\frac{1}{x}\right)}$, holomorphes, l'une en x , l'autre en $\frac{1}{x}$, le coefficient de x^j a un module plus petit que

$$\frac{\pi(\rho) \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1 - \pi(\rho) - \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2} \pi(\rho) \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)} \rho^{-j}.$$

Cela posé, on a l'identité

$$eg_0 e^{\mathcal{G}(x)} e^{\mathcal{H}\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + P(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où

$$eg_0 e^{\mathcal{H}\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + \frac{Q\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + P(x)} e^{-\mathcal{G}(x)},$$

en ne retenant pas dans le second membre les termes contenant x à une puissance supérieure à 0. Ainsi ordonnons $\frac{1}{1 + P(x)}$ suivant les puissances positives de x , multiplions par $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ et soit

$$Q'\left(\frac{1}{x}\right) = a'_n + \frac{a'_{n-1}}{x} + \frac{a'_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a'_0}{x^n}$$

la partie de ce produit contenant x à une puissance nulle ou négative; on a

$$eg_0 e^{\mathcal{H}\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + Q'\left(\frac{1}{x}\right),$$

l'erreur absolue commise sur le coefficient de $\frac{1}{x^i}$ ayant un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho) \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) \gamma'\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1 - \pi(\rho) - \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2} \pi(\rho) \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)} \rho^i,$$

$\gamma' \left(\frac{1}{\rho} \right)$ représentant

$$x'_n + \frac{x'_{n-1}}{\rho} + \dots + \frac{x'_0}{\rho^n},$$

où x'_i est égal au module de a'_i .

De même

$$e g_0 e^{G(x)} = 1 + \frac{P(x)}{1 + Q \left(\frac{1}{x} \right)} e^{-\gamma' \left(\frac{1}{x} \right)},$$

en ne retenant pas dans le second membre les termes contenant x à une puissance négative. Désignons par $P'(x)$,

$$P'(x) = a''_n + a'_{n+1}x + a'_{n+2}x^2 + \dots + a'_{n-i}x^i + \dots,$$

la partie de la fonction $\frac{P(x)}{1 + Q \left(\frac{1}{x} \right)}$ ne contenant pas x à une puissance négative; on a

$$e g_0 e^{G(x)} = 1 + P'(x);$$

l'erreur absolue commise sur le coefficient de x^i ayant un module inférieur à

$$\frac{\pi(\rho) \gamma' \left(\frac{1}{\rho} \right) \pi'(\rho)}{1 - \pi(\rho) - \gamma \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \pi(\rho) \gamma \left(\frac{1}{\rho} \right)} \frac{1}{\rho^i},$$

$\pi'(\rho)$ représentant la fonction

$$x''_n + x'_{n+1} \rho + \dots + x'_{n+i} \rho^i + \dots$$

Lorsque $F(x)$ est une fonction entière de degré m , $P'(x)$ doit être arrêté au terme de degré $m - n$.

$\pi(\rho)$ et $\gamma' \left(\frac{1}{\rho} \right)$ sont sensiblement égaux respectivement à $\pi(\rho)$, $\gamma \left(\frac{1}{\rho} \right)$ lorsque ρ est petit, et l'on peut prendre pour limite du module de l'erreur commise, dans l'un et l'autre cas, sur le coefficient de x^i , i entier positif ou négatif, $\frac{4}{27} \frac{\mu^3}{1 - \mu} \rho^{-i}$, ρ étant la valeur qui rend minimum la fonction $\pi(x) + \gamma \left(\frac{1}{x} \right)$, lorsque x varie de r à R .

On peut prendre

$$x^n \left[1 + Q' \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0$$

pour l'équation qui admet les n premières racines de $F(x) = 0$, et $1 + P'(x) = 0$ pour celle qui admet toutes les autres, avec une approximation d'autant plus grande que μ est plus petit.

4. Si l'équation $f(x) = 0$ a n racines de modules inférieurs à r_1 et aucune dans l'intérieur de la couronne comprise entre les cercles de rayon r_1 et r_2 , r_2 étant supérieur à r_1 et au plus égal au rayon de convergence de la série holomorphe $f(x)$, il peut se faire que ces n racines ne soient pas séparées dans le plan; mais les n premières racines de l'équation transformée en posant $y = x^k$ seront séparées dans le plan pour toutes les valeurs du nombre k , supposé entier, supérieures à une certaine limite.

Pour la facilité des calculs, on choisit pour k les puissances successives de 2; méthode de Gräff et Carvallo (thèse de M. Carvallo, 1889).

On obtient la transformée en y en effectuant le produit

$$f(x)f(\theta x) \dots f(\theta^{k-1}x),$$

θ étant une racine primitive de $\theta^k - 1 = 0$. Après les réductions ce produit est une fonction entière de x^k , et il suffit de changer x^k en y , pour avoir le premier membre de l'équation en y . Or, d'après un théorème de M. Weierstrass, on a, pour les valeurs de x de module inférieur à r_2 ,

$$f(x) = F(x) e^{G(x)},$$

$F(x)$ étant une fonction entière en x , de degré n , dans laquelle on peut supposer le coefficient de la plus haute puissance de x égal à l'unité et $G(x)$ une série holomorphe convergente dans le cercle de rayon r_2 . Posons

$$G(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_i x^i + \dots$$

La transformée de $f(x)$, en posant $y = x^k$, sera égale au produit de la transformée de $F(x)$, $\tilde{F}(y)$, par $e^{k b_0 + G_1(y)}$ où

$$G_1(y) \equiv k(b_k y + \dots + b_{ki} y^i + \dots).$$

Le module de $ib_i R^i$ est aussi petit que l'on veut pour toutes les valeurs de i suffisamment grandes, si R , quantité positive, est plus petite que r_2 . On peut donc poser

$$|b_i| < \frac{n}{iR^i}$$

pour les valeurs de i supérieures à un nombre i_1 , R étant compris entre r_1 et r_2 . Pour les valeurs de k supérieures à i_1 , les modules des coefficients de $G_1(y)$ sont au plus égaux aux coefficients correspondants de $-\iota \left(1 - \frac{y}{R^k}\right)^n$. On peut faire abstraction du facteur e^{kb_0} et prendre pour transformée de $f(x)$, $\tilde{f}(y) e^{G_1(y)}$; d'après ce qui précède, les coefficients de cette transformée ont des modules inférieurs aux coefficients de la fonction

$$\left[\frac{y + \frac{r_1^k}{R^k}}{1 - \frac{y}{R^k}} \right]^n$$

développée suivant les puissances croissantes de y ; de plus, si $1 + c$ est le coefficient de y^n dans ce développement, c est une fonction entière de $\left(\frac{r_1}{R}\right)^k$, infiniment petite lorsque k tend vers l'infini, et le coefficient de y^n dans $\tilde{f}(y) e^{G_1(y)}$ a un module compris entre $1 - c$ et $1 + c$. Ainsi, pour démontrer la proposition, il suffit d'établir que l'équation

$$2y^n - \left(\frac{y + \frac{r_1^k}{R^k}}{1 - \frac{y}{R^k}} \right)^n = 0$$

a deux racines positives pour les valeurs de k suffisamment grandes. Extrayant la racine $n^{\text{ième}}$, il vient

$$\sqrt[n]{2} \frac{y^2}{R^k} - (\sqrt[n]{2} - 1)y + \frac{r_1^k}{R^k} = 0.$$

Cette équation du second degré a deux racines positives pour les valeurs de k qui satisfont à l'inégalité

$$(\sqrt[n]{2} - 1)^2 > 4 \sqrt[n]{2} \left(\frac{r_1}{R} \right)^k.$$

§. Soit l'équation

$$(1) \quad X_0 + X_1 y + \dots + X_n y^n + \dots = 0,$$

les X désignant des séries holomorphes en x , les n premières $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ s'annulant et la $(n+1)^{\text{ième}}$, X_n , ne s'annulant pas avec x . Pour les valeurs de x , d'assez petit module, les n premières racines de cette équation en y seront séparées dans le plan. Ordonnons en effet par rapport à x et soit alors

$$(a_n + Y_0)y^n + Y_1 x + Y_2 x^2 + \dots = 0$$

ce que devient l'équation, a_n étant la valeur de X_n pour $x = 0$. Désignons par $|Y_i|$ ce que devient Y_i quand on y remplace tous les coefficients par leur module. Cela posé, soient y_1 une quantité positive rendant $x_n - |Y_0|$ positif (x_n module de a_n), et inférieure aux rayons de convergence des séries $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$; x_1 une quantité positive rendant positif ou nul le premier membre de l'équation

$$(2) \quad y_1^n (x_n - |Y_0|) - x_1 |Y_1| - x_1^2 |Y_2| - \dots - x_1^i |Y_i| - \dots = 0,$$

$|Y_i|$ représentant la valeur de $|Y_i|$ pour $y = y_1$.

Pour les valeurs de x de module inférieur à x_1 , l'équation (1) a n racines de modules inférieurs à y_1 , et ces n racines sont séparées dans le plan. Presque toujours, dans le cas par exemple où le premier membre de l'équation (1) est un polynôme entier en x et y , il y aura une valeur positive φ de x_1 , pour laquelle l'équation (2) admettra une racine positive double en y_1, φ . Alors, pour $x_1 < \varphi$, l'équation (2) aura deux racines positives y_1, y_2 , comprenant entre elles $\varphi, y_2 > \varphi > y_1$; et pour $|x| < x_1$, l'équation (1) a n racines de modules plus petits que y_1 , séparées dans le plan. La méthode du n° 1 permettra de former l'équation de degré n qui admet ces n racines. Toute fonction symétrique et entière de ces n racines est développable suivant les puissances croissantes de x et l'erreur commise en négligeant les termes de degré supérieur à i a un module inférieur à

$$= \frac{A \left(\frac{|x|}{\varphi} \right)^{i+1}}{1 - \frac{|x|}{\varphi}},$$

A désignant la valeur que prend la fonction quand on y remplace chaque racine par v , et les coefficients par leur module.

6. Soit l'équation

$$y^n - x f(y) = 0,$$

où

$$f(y) = b_0 + b_1 y + \dots + b_i y^i + \dots$$

Posons

$$\varphi(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \dots + \beta_i y^i + \dots,$$

β_i étant égal ou supérieur au module de b_i . On pourra prendre pour y_1 un nombre positif quelconque inférieur au rayon de convergence de $\varphi(y)$; x_1 sera égal à $\frac{y_1^n}{\varphi(y_1)}$; v sera déterminé par l'équation $v \varphi'(v) - n \varphi(v) = 0$ et $\rho = \frac{v^n}{\varphi(v)} = \frac{1}{\varphi'(v)}$.

En particulier considérons l'équation

$$y - x \sin(b + y) = 0.$$

Soit β l'angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ ayant même sinus en valeur absolue que b ; on a

$$\varphi(y) = \sin \beta \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \cos \beta \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Pour $y_1 = 1$,

$$\frac{y_1}{\varphi(y_1)} \geq \frac{2}{\sqrt{2(e^2 + e^{-2})}} > 0,514.$$

L'équation en v devient

$$\begin{aligned} 0 = & -\sin \beta + \sin \beta \left(\frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{v^{2i}}{1 \cdot 2 \dots (2i-2) \cdot 2i} + \dots \right) \\ & + \cos \beta \left(\frac{v^3}{3} + \dots + \frac{v^{2i+1}}{1 \cdot 2 \dots (2i-1) \cdot (2i+1)} + \dots \right). \end{aligned}$$

β tendant vers 0, v tend vers $(3 \tan \beta)^{\frac{1}{3}}$, et ρ vers l'unité. Ainsi ρ varie entre 0,51 et 1; on sait que Laplace a montré que le rayon de convergence de la fonction y est supérieur à 0,662.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 FÉVRIER 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Bioche : *Sur les surfaces du troisième degré qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche.*

M. Goursat : *Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques.*

M. Balitrand adresse une Note *Sur le développement des coordonnées d'un point dans le mouvement relatif et sur la courbure des lignes orthogonales.*

M. Goursat transmet une Note de M. Berdellé, intitulée *Études d'Arithmétique figurée.*

SÉANCE DU 20 FÉVRIER 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Lémeray, présenté par MM. Laisant et Touche; MM. Fontès et Maillet, présentés par MM. Humbert et d'Ocagne; M. Borel, présenté par MM. Goursat et Painlevé.

Communications :

M. Raffy : *Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant.*

M. Goursat présente quelques observations à ce sujet.

M. H. von Koch adresse une Note *Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues.*

M. Maillet adresse une Note intitulée *Extension du théorème de Fermat sur les nombres polygones.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE FORMULE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. E. GOURSAT.

I. A la page 359 du *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen (t. II), on trouve une formule remarquable, généralement attribuée à Weierstrass, et qui donne immédiatement l'intégrale générale de l'équation d'Euler. Cette formule est la suivante. Soit $R(x)$ un polynôme du troisième ou du quatrième degré, n'ayant que des facteurs linéaires simples,

$$R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4;$$

désignons par g_2, g_3 les deux invariants

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$

$$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4,$$

et par pu la fonction elliptique de Weierstrass qui satisfait à l'équation différentielle

$$(p'u)^2 = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

Si l'on remplace dans pu la variable u par l'intégrale de première espèce

$$u = \int_x^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

le résultat de la substitution devient

$$pu = \frac{R_x^2 + \sqrt{R(x)R(x)}}{2(x-x)^2},$$

où l'on a posé

$$R_x^2 = x^2(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2) + 2x(a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3) + a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4.$$

Cette formule peut s'établir par une voie entièrement analytique que je vais indiquer.

2. Considérons la relation du premier genre

$$(1) \quad y^2 = R(x) = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4$$

et la surface de Riemann à deux feuillets qui correspond à cette relation. L'intégrale de première espèce

$$(2) \quad u = \int_{(\alpha, \beta)}^{(x, y)} \frac{dx}{y},$$

prise sur cette surface depuis une origine fixe (α, β) jusqu'à une limite supérieure variable (x, y) , possède deux périodes distinctes ω, ω' , et, quand on fait varier le chemin d'intégration allant du point (α, β) au point (x, y) , toutes les valeurs que peut acquérir l'intégrale sont comprises dans la formule

$$u_0 + m \omega + n \omega',$$

u_0 étant l'une de ces valeurs, et m, n désignant deux nombres entiers quelconques. Ces deux périodes ω, ω' ne dépendent que des invariants g_2, g_3 ; en effet, imaginons que l'on pose

$$x = \frac{\lambda x' + \mu}{\nu x' + \rho},$$

λ, μ, ν, ρ désignant des constantes quelconques; soit

$$R_1(x') = (\nu x' + \rho)^4 R\left(\frac{\lambda x' + \mu}{\nu x' + \rho}\right),$$

et soient g'_2, g'_3 les invariants de $R_1(x')$. On a

$$g'_2 = g_2(\lambda\rho - \mu\nu)^4,$$

$$g'_3 = g_3(\lambda\rho - \mu\nu)^6,$$

et l'intégrale de première espèce devient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int \frac{(\lambda\rho - \mu\nu) dx'}{\sqrt{R_1(x')}} = \int \frac{dx'}{\sqrt{\frac{R_1(x')}{(\lambda\rho - \mu\nu)^2}}}.$$

Mais les invariants du nouveau polynôme sous le radical $\frac{R_1(x')}{(\lambda\rho - \mu\nu)^2}$ sont égaux à ceux de $R_1(x')$ divisés respectivement

par $(\lambda^2 - \mu^2)^4$ et par $(\lambda^2 - \mu^2)^6$, c'est-à-dire aux invariants de $R(x)$.

D'ailleurs, il est clair que les périodes des deux intégrales sont les mêmes; on voit donc, en particulier, que les périodes de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ sont les mêmes que celles de l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{4x'^3 - g_2x' - g_3}},$$

car on peut toujours ramener la première intégrale à cette forme normale par une substitution linéaire.

Cela posé, soit pu la fonction elliptique de Weierstrass dont les invariants sont g_2 et g_3 , et qui admet, par suite, les périodes ω et ω' . Si dans pu l'on remplace u par l'intégrale de première espèce (2), le résultat de la substitution est une fonction du point analytique (x, y) , $\Phi(x, y)$, dont nous allons étudier les propriétés.

Tout d'abord, il est évident que $\Phi(x, y)$ est une fonction uniforme sur la surface de Riemann, car, lorsque le point (x, y) décrit un contour fermé, u augmente d'une période et, par suite, pu reprend sa valeur initiale. En second lieu, $\Phi(x, y)$ n'admet, sur toute la surface de Riemann, que des discontinuités polaires. En effet, si en un point (x_0, y_0) la valeur de u est différente d'une période, pu est une fonction régulière de u dans le voisinage de ce point; par suite $\Phi(x, y)$ est une fonction régulière de $x - x_0$,

ou de $\sqrt{x - x_0}$, ou de $\frac{1}{x}$ ou de $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, suivant que le point (x_0, y_0) est un point ordinaire à distance finie, un point de ramification à distance finie, un point ordinaire à l'infini, ou un point de ramification à l'infini (ce dernier cas ne peut se présenter que si $a_0 = 0$). Si, en un point (x_0, y_0) , u devient égal à une période, pu devient infini, mais le développement de $\Phi(x, y)$ ne contient évidemment qu'un nombre fini de termes à exposants négatifs dans le domaine du point singulier; ce point est donc un pôle. On conclut de là, d'après un théorème bien connu, que $\Phi(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et de y .

Imaginons que l'on ait tracé sur la surface de Riemann T , qui correspond à l'équation (1), un système de deux coupures a et b

qui la transforment en une surface simplement connexe T' . Lorsque le point analytique (x, y) décrit la surface simplement connexe T' , le point qui figure la valeur de u décrit toute la surface d'un parallélogramme P construit sur les périodes, et il y a correspondance univoque entre les points des deux surfaces P et T' . Or la fonction pu reprend la même valeur en deux points seulement du parallélogramme P ; par suite, $\Phi(x, y)$ ne reprend une valeur donnée A qu'en deux points seulement de la surface de Riemann. Comme le nombre des pôles d'une fonction rationnelle $\Phi(x, y) - A$ est égal au nombre des zéros, on en conclut que la fonction rationnelle $\Phi(x, y)$ admet deux pôles du premier ordre ou un pôle du second ordre. Nous connaissons déjà un pôle du second ordre de cette fonction, le point (α, β) , car on a pour ce point $u = 0$, et pu admet le point $u = 0$ pour pôle du second ordre.

Donc la fonction $\Phi(x, y)$ reste finie sur toute la surface de Riemann, sauf au point (α, β) qui est un pôle du second ordre.

3. Supposons, pour fixer les idées, que le point (α, β) soit un point à distance finie, distinct d'un point de ramification. L'expression générale des fonctions rationnelles de x et de y , qui admettent un seul pôle du second ordre au point (α, β) , est ⁽¹⁾

$$\Phi(x, y) = A + C \left[\frac{\beta + \beta_1(x - \alpha) + y}{(x - \alpha)^2} \right],$$

A et C désignant des constantes arbitraires, et β_1 étant le coefficient de $(x - \alpha)$ dans le développement de y au voisinage du point (α, β)

$$(3) \quad y = \beta + \beta_1(x - \alpha) + \beta_2(x - \alpha)^2 + \dots$$

La partie principale du développement de $\Phi(x, y)$, au voisinage du point (α, β) , est donc

$$(4) \quad \Phi(x, y) = \frac{2C\beta}{(x - \alpha)^2} + \frac{2C\beta_1}{x - \alpha} + A + C\beta_2 + (x - \alpha) \{ \dots \}.$$

(1) APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, p. 18.

D'autre part, dans le voisinage de l'origine, on a

$$pu = \frac{1}{u^2} + \frac{\sigma_2}{20} u^2 + \frac{\sigma_3}{28} u^4 + \dots;$$

quand on remplace u par son expression en fonction de x , les seuls termes du développement qui ne renferment pas de puissances positives de $x - \alpha$ proviennent de $\frac{1}{u^2}$.

Du développement (3), on déduit successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{y'} &= \frac{1}{\beta} - \frac{\beta_1(x-\alpha)}{\beta^2} + \frac{\beta_1^2 - \beta\beta_2}{\beta^3} (x-\alpha)^2 + \dots, \\ u &= \frac{x-\alpha}{\beta} \left[1 - \frac{\beta_1(x-\alpha)}{2\beta} + \frac{\beta_1^2 - \beta\beta_2}{3\beta^2} (x-\alpha)^2 + \dots \right], \\ \frac{1}{u} &= \frac{\beta}{x-\alpha} + \frac{\beta_1}{2} + \frac{4\beta\beta_2 - \beta_1^2}{12\beta} (x-\alpha) + \dots, \\ (5) \quad \frac{1}{u^2} &= \frac{\beta^2}{(x-\alpha)^2} + \frac{\beta\beta_1}{x-\alpha} + \frac{\beta_1^2 + 8\beta\beta_2}{12} + \dots \end{aligned}$$

Identifions les premiers termes des développements (4) et (5); nous trouvons les trois équations

$$2C\beta = \beta^2, \quad 2C\beta_1 = \beta\beta_1, \quad A + C\beta_2 = \frac{\beta_1^2 + 8\beta\beta_2}{12},$$

qui se réduisent à deux équations distinctes, d'où l'on tire

$$C = \frac{\beta}{2}, \quad A = \frac{\beta_1^2 + 2\beta\beta_2}{12}.$$

Remplaçons β_1 et β_2 par leurs valeurs; de l'équation (1) on tire

$$\begin{aligned} y y' &= 2(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3), \\ y y'' + y'^2 &= 6(a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2), \end{aligned}$$

et, en faisant $x = \alpha$, $y = \beta$, il vient

$$\begin{aligned} \beta\beta_1 &= 2(a_0 \alpha^3 + 3a_1 \alpha^2 + 3a_2 \alpha + a_3), \\ \beta_1^2 + 2\beta\beta_2 &= 6(a_0 \alpha^2 + 2a_1 \alpha + a_2) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$A = \frac{a_0 \alpha^2 + 2a_1 \alpha + a_2}{2}.$$

En remplaçant A et C par ces valeurs dans l'expression de $\Phi(x, y)$, on trouve, toutes réductions faites,

$$(6) \quad pu = \Phi(x, y) = \frac{R_x^2 - \beta y}{2(x - \alpha)^2};$$

il suffit d'y remplacer β par $\sqrt{R(\alpha)}$ et y par $\sqrt{R(x)}$ pour avoir la formule de Weierstrass.

Les formules (2) et (6) sont entièrement équivalentes et, d'après la démonstration même, il n'y a aucune ambiguïté possible pour le signe à attribuer à chacun des radicaux $\sqrt{R(x)}$, $\sqrt{R(\alpha)}$.

4. Les deux points analytiques (α, β) et (x, y) jouent un rôle tout à fait symétrique dans la formule (6). Si l'on attribue au point (α, β) des positions particulières, on obtient des formules plus simples, que l'on pourrait établir directement de la même façon, mais qui se déduisent aussi de la formule (6) comme cas limites. Supposons, par exemple, que le point (α, β) vienne en un point de ramification de la surface de Riemann; alors α est égal à l'une des racines φ_i de l'équation $R(x) = 0$, et β est nul. Le polynôme $R_x^{\varphi_i}$ admet aussi la racine φ_i et, par la suppression du facteur commun $x - \varphi_i$, la formule (6) se réduit à

$$(7) \quad pu = \frac{Ax + B}{2(x - \varphi_i)},$$

en posant

$$A = a_0 \varphi_i^2 + 2a_1 \varphi_i + a_2,$$

$$B = a_0 \varphi_i^3 + 3a_1 \varphi_i^2 + 3a_2 \varphi_i + a_3.$$

Si le point (α, β) s'éloigne à l'infini, divisons le numérateur et le dénominateur de la formule (6) par α^2 ; lorsque le module de α croît indéfiniment, $\frac{2(x - \alpha)^2}{\alpha^2}$ a pour limite 2, $\frac{R_x^2}{\alpha^2}$ a pour limite $a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$. Quant au rapport $\frac{\beta}{\alpha^2}$, il tend vers zéro lorsque $R(x)$ est du troisième degré, et vers $\pm \sqrt{a_0}$ lorsque $R(x)$ est du quatrième degré, le signe devant être pris d'après le feuillet où se trouve le point à l'infini considéré. La formule (6) devient donc

$$(8) \quad pu = \frac{2a_1 x + a_2}{2},$$

si $u_0 = 0$, et

$$(9) \quad pu = \frac{u_0 x^2 + 2u_1 x + u_2 + \sqrt{a_0} x}{2},$$

si u_0 n'est pas nul.

§. Le problème de l'inversion consiste à exprimer les coordonnées (x, y) de la limite supérieure de l'intégrale (2) au moyen de la valeur u de cette intégrale. Les formules, qui dépendent évidemment de la limite inférieure (α, β) , se déduisent sans difficulté de la formule générale (6). Supposons d'abord que le point (α, β) soit un point à distance finie, distinct d'un point de ramification. On a l'identité

$$(10) \quad (R_x^\alpha)^2 - (\beta y)^2 = (R_x^\alpha)^2 - R(x)R(\alpha) = (x - \alpha)^2 \Pi(x, \alpha),$$

$\Pi(x, \alpha)$ étant un polynôme du second degré, dont on trouvera l'expression développée dans le Traité d'Halphen (t. II, p. 354). La formule (6) peut aussi s'écrire

$$pu = \frac{(x - \alpha)^2 \Pi(x, \alpha)}{2(x - \alpha)^2 (R_x^\alpha - \beta y)} = \frac{\Pi(x, \alpha)}{2(R_x^\alpha - \beta y)},$$

et l'on a les deux relations

$$R_x^\alpha + \beta y = 2(x - \alpha)^2 pu,$$

$$R_x^\alpha - \beta y = \frac{\Pi(x, \alpha)}{2pu};$$

on en tire

$$R_x^\alpha = (x - \alpha)^2 pu + \frac{\Pi(x, \alpha)}{4pu},$$

$$\beta y = (x - \alpha)^2 pu - \frac{\Pi(x, \alpha)}{4pu}.$$

Différentions la première relation par rapport à x , en remarquant que l'on a

$$\frac{dpu}{dx} = p'u \frac{du}{dx} = \frac{p'u}{y};$$

il vient

$$\frac{dR_x^\alpha}{dx} = 2(x - \alpha)pu + \frac{d\Pi}{dx} + \left[(x - \alpha)^2 - \frac{\Pi(x, u)}{4p^2u} \right] \frac{p'u}{y},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(11) \quad \frac{dR_x^\alpha}{dx} = 2(x - \alpha)pu + \frac{d\Pi}{dx} + \frac{\beta p'u}{pu}.$$

La relation (11) est du premier degré en x , et l'on en tirera la valeur de x exprimée au moyen de pu , $p'u$, α , β . La valeur de y se déduit ensuite de la relation

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}, \quad y = \frac{dx}{du}.$$

Lorsque la limite inférieure (α, β) est un point de ramification, à distance finie ou infinie, les formules se simplifient. Les formules (7) et (8) montrent, en effet, que x est une fonction linéaire de pu , et l'on a ensuite

$$y = \frac{dx}{du}.$$

Enfin, lorsque $R(x)$ est du quatrième degré et que l'on prend pour limite inférieure de l'intégrale un point à l'infini de la surface de Riemann, on doit partir de la formule

$$2pu = a_0x^2 + 2a_1x + a_2 + \sqrt{a_0}y,$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} 2pu &= \frac{(a_0x^2 + 2a_1x + a_2)^2 - a_0(a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4)}{a_0x^2 + 2a_1x + a_2 - \sqrt{a_0}y} \\ &= \frac{\Pi(x)}{a_0x^2 + 2a_1x + a_2 - \sqrt{a_0}y} \end{aligned}$$

en posant

$$\Pi(x) = 4(a_1^2 - a_0a_2)x^2 + 4(a_1a_2 - a_0a_3)x + a_2^2 - a_0a_4.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} a_0x^2 + 2a_1x + a_2 &= pu + \frac{\Pi(x)}{4pu}, \\ \sqrt{a_0}y &= pu - \frac{\Pi(x)}{4pu}; \end{aligned}$$

en différentiant la première équation par rapport à x , et en tenant compte de la seconde, il vient

$$2(a_0x + a_1) = \frac{\Pi'(x)}{4pu} + \frac{\sqrt{a_0}}{pu} p'u;$$

on en tire

$$x = \frac{-2a_1pu + \sqrt{a_0}p'u + a_1a_2 - a_0a_3}{2a_0pu + 2a_0a_2 - 2a_1^2},$$

et y est donné par la formule

$$y = \frac{dx}{du}.$$

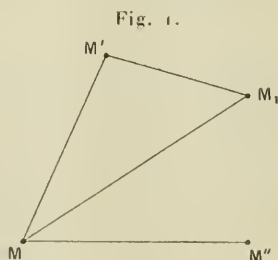
Les formules ainsi obtenues sont identiques, à une petite différence de notation près, aux premières formules données par Halphen (*Fonctions elliptiques*, t. I, p. 120).

SUR LE DÉVELOPPEMENT
DES COORDONNÉES D'UN POINT DANS LE MOUVEMENT RELATIF
ET SUR LA COURBURE DES LIGNES ORTHOGONALES;

par M. BALITRAND.

Considérons dans le plan deux axes rectangulaires fixes Ox , Oy et deux axes rectangulaires mobiles $O'x'$, $O'y'$ qui, à l'origine, coïncident avec les axes fixes. Soit M un point invariablement lié aux axes mobiles et soient x , y ses coordonnées par rapport aux axes fixes. Soient M_1 , M' , M'' les positions qu'il occupe au bout de l'instant Δt dans le mouvement absolu, le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement.

Le triangle $MM'M_1$ montre que MM_1 est la résultante de MM'



et de $M'M_1$; de sorte qu'en projetant sur les axes Ox et Oy on a

$$\partial x = dx + \Delta_1 x,$$

$$\partial y = dy + \Delta_1 y,$$

les caractéristiques ∂ , d , Δ se rapportant aux déplacements absolu, relatif et d'entraînement et Δ_1 désignant ce que devient Δ quand on y remplace les coordonnées x , y du point M par les coordon-

nées $x + dx, y + dy$ du point M'. En désignant par α l'angle que fait Ox avec $O'x'$ et par x_0, y_0 les coordonnées du point O' par rapport aux axes Ox, Oy , les formules de la transformation des coordonnées

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\y_1 &= y_0 + x \sin \alpha + y \cos \alpha\end{aligned}$$

donnent immédiatement

$$\begin{aligned}\Delta_1 x &= \Delta x + dx \cos \alpha - dy \sin \alpha - dx, \\ \Delta_1 y &= \Delta y + dx \sin \alpha + dy \cos \alpha - dy,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(1) \quad \begin{cases} \partial x = dx + \Delta x + dx \cos \alpha - dy \sin \alpha - dx, \\ \partial y = dy + \Delta y + dx \sin \alpha + dy \cos \alpha - dy. \end{cases}$$

Ces formules ont lieu aussi bien pour des déplacements finis que pour des déplacements infiniment petits, aussi bien pour le cas où x et y dépendent d'une seule variable que pour le cas où x et y dépendent de deux variables. Supposons qu'il s'agisse d'un déplacement infiniment petit et développons en séries toutes les quantités qui entrent dans les formules (1); nous obtenons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \partial x + \frac{1}{1.2} \partial^2 x + \frac{1}{1.2.3} \partial^3 x + \dots &= dx + \frac{1}{1.2} d^2 x + \frac{1}{1.2.3} d^3 x + \dots \\ &+ \Delta x + \frac{1}{1.2} \Delta^2 x + \frac{1}{1.2.3} \Delta^3 x + \dots \\ &- \alpha \left(dy + \frac{1}{1.2} d^2 y + \dots \right) \\ &- \frac{\alpha^2}{1.2} \left(dx + \frac{1}{1.2} d^2 x + \dots \right) + \dots, \\ \partial y + \frac{1}{1.2} \partial^2 y + \frac{1}{1.2.3} \partial^3 y + \dots &= dy + \frac{1}{1.2} d^2 y + \frac{1}{1.2.3} d^3 y + \dots \\ &+ \Delta y + \frac{1}{1.2} \Delta^2 y + \frac{1}{1.2.3} \Delta^3 y + \dots \\ &+ \alpha \left(dx + \frac{1}{1.2} d^2 x + \dots \right) \\ &- \frac{\alpha^2}{1.2} \left(dy + \frac{1}{1.2} d^2 y + \dots \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

On déduit de là, en se limitant aux éléments du premier ordre,

du second ordre, du troisième ordre, etc., les formules suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \partial x = dx + \Delta x, & \partial y = dy + \Delta y, \\ \partial^2 x = d^2 x + \Delta^2 x - 2x dy, & \partial^2 y = d^2 y + \Delta^2 y + 2x dx, \\ \partial^3 x = d^3 x + \Delta^3 x - 3x d^2 y - 3x^2 dx, & \partial^3 y = d^3 y + \Delta^3 y + 3x d^2 x - 3x dy, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

Les formules (3) s'appliquent à un déplacement infiniment petit quelconque et permettent de développer en séries ordonnées, suivant les puissances croissantes de x , les coordonnées x et y . Considérons le cas où les axes Ox et Oy coïncident avec la tangente et la normale à une courbe et choisissons l'arc de cette courbe pour variable indépendante. En désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe au point O , les formules (3) se transforment dans les suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dx}{ds} + 1 - \frac{y}{\rho}, \\ \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{y}{\rho} \frac{d\rho}{ds} - \frac{3}{\rho} \frac{dy}{ds}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{x}{\rho} \frac{d\rho}{ds} + \frac{3}{\rho} \frac{dx}{ds}, \\ \frac{\partial^3 x}{\partial s^3} = \frac{d^3 x}{ds^3} - \frac{4}{\rho} \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{dy}{ds} \frac{d\rho}{ds} - \frac{3}{\rho^2} \frac{dx}{ds} + \frac{y}{\rho^2} \left(\frac{d^2 \rho}{ds^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \right), \\ \frac{\partial^3 y}{\partial s^3} = \frac{d^3 y}{ds^3} + \frac{4}{\rho} \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{dx}{ds} \frac{d\rho}{ds} - \frac{3}{\rho^2} \frac{dy}{ds} - \frac{x}{\rho^2} \left(\frac{d^2 \rho}{ds^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \right), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

En désignant par $x_0, y_0, x'_0, y'_0, x''_0, y''_0, \dots$ ce que deviennent $x, y, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^2 y}{ds^2}, \dots$ pour $s = 0$, les relations (4) fourniront pour x et y les développements suivants, ordonnés suivant les puissances croissantes de s :

$$(5) \quad \begin{cases} x = x_0 + \left(x'_0 + 1 - \frac{y_0}{\rho} \right) s + \left(x''_0 + \frac{y_0 \rho'}{\rho} - \frac{3y'_0}{\rho} \right) \frac{s^2}{12} + \dots, \\ y = y_0 + \left(y'_0 + \frac{x_0}{\rho} \right) s + \left(y''_0 - \frac{x_0 \rho'}{\rho} + \frac{3x'_0}{\rho} \right) \frac{s^2}{12} + \dots \end{cases}$$

Enfin, les relations (3) conduisent aux formules très importantes qui assurent la fixité du point M dans le plan :

$$(6) \quad dx + \Delta x = 0, \quad dy + \Delta y = 0,$$

et dans le cas particulier des formules (4) :

$$(6') \quad \frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho}.$$

Ce sont ces formules et les formules analogues pour l'espace qui, établies par M. Cesaro (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 128; 1886), ont été employées par lui avec tant de succès, dans ses recherches sur la Géométrie intrinsèque des courbes gauches et des surfaces réglées.

Nous allons faire une application des formules qui précèdent à la théorie de la courbure des lignes orthogonales dans le plan.

Courbure des lignes orthogonales. — Supposons que le plan rapporté à deux systèmes de lignes coordonnées (u) et (v) admette pour élément linéaire l'expression

$$(1) \quad ds^2 = f^2 du^2 + 2fg \cos \theta du dv + g^2 dv^2.$$

Soit M un point du plan correspondant aux courbes (u) et (v) et M' un point infiniment voisin correspondant aux courbes ($u + du$) et ($v + dv$). Prenons comme axes mobiles deux droites issues du point M, la droite Mx faisant un angle φ avec la tangente à la courbe (u), cet angle variant d'ailleurs d'un point à un autre. Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan par rapport à ces axes mobiles. Pour passer du point M au point M' infiniment voisin, on peut se déplacer d'abord suivant $u = \text{const.}$, puis suivant $v = \text{const.}$; on trouve alors les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \partial x = dx + g \cos \varphi dv + f \cos \psi du \\ \quad - y \left(\frac{1}{\rho_u} + \varphi' \right) g dv - y \left(\frac{1}{\rho_v} + \psi' \right) f du, \\ \partial y = dy + g \sin \varphi dv + f \sin \psi du \\ \quad + x \left(\frac{1}{\rho_u} + \varphi' \right) g dv + x \left(\frac{1}{\rho_v} + \psi' \right) f du. \end{cases}$$

ϱ_u et ϱ_v désignent les rayons de courbure des courbes (u) et (v) au point M, et l'on a posé

$$\psi = \varphi + \theta.$$

La caractéristique d se rapporte au déplacement relatif et la caractéristique δ au déplacement absolu.

Les formules (2) se simplifient si l'axe Mx coïncide avec la tangente à la courbe (u) . Il suffit de faire $\varphi = 0$ dans les formules (2) qui, dans cette hypothèse, se réduisent à

$$(3) \quad \begin{cases} \delta x = dx + g dv + f \cos \theta du - y \left(g \frac{dv}{\varrho_u} + f \frac{du}{\varrho_v} \right) - y \theta' f du, \\ \delta y = dy + f \sin \theta du + x \left(g \frac{dv}{\varrho_u} + f \frac{du}{\varrho_v} \right) + x \theta' f du. \end{cases}$$

Les formules (2) se simplifient encore si $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si les lignes coordonnées sont orthogonales. Faisons donc $\theta = \frac{\pi}{2}$; nous obtenons

$$(4) \quad \begin{cases} \delta x = dx + g \cos \varphi dv - f \sin \varphi du \\ \quad - y \left(g \frac{dv}{\varrho_u} + f \frac{du}{\varrho_v} \right) - y \varphi' (g dv + f du), \\ \delta y = dy + g \sin \varphi dv + f \cos \varphi du \\ \quad + x \left(g \frac{dv}{\varrho_u} + f \frac{du}{\varrho_v} \right) + x \varphi' (g dv + f du). \end{cases}$$

Enfin, l'on peut combiner les hypothèses (3) et (4), c'est-à-dire supposer $\varphi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; on arrive alors aux formules très simples et très importantes

$$(5) \quad \begin{cases} \delta x = dx + g dv - y \left(g \frac{dv}{\varrho_u} + f \frac{du}{\varrho_v} \right), \\ \delta y = dy + f du + x \left(g \frac{dv}{\varrho_u} + f \frac{du}{\varrho_v} \right). \end{cases}$$

Si nous appliquons maintenant les relations (6) du premier paragraphe, nous obtenons, pour la fixité d'un point, les condi-

tions suivantes

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} + f \cos \theta - \frac{fy}{\rho_v} - fy' \theta' = 0, & \frac{\partial y}{\partial u} + f \sin \theta + \frac{fx}{\rho_v} + fx' \theta' = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} + g - \frac{gx}{\rho_u} = 0, & \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{gx}{\rho_u} = 0, \end{cases}$$

et pour l'invariabilité de la direction l , m les relations

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial l}{\partial u} - \frac{fm}{\rho_v} - fm' \theta' = 0, & \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{fl}{\rho_v} - fl' \theta' = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial v} - \frac{gm}{\rho_u} = 0, & \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{gl}{\rho_u} = 0. \end{cases}$$

Exprimons que les dérivées de l et de m , fournies par les relations (7), satisfont aux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial l}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial m}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial m}{\partial v};$$

on obtient ainsi

$$(8) \quad f \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\rho_v} - g \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho_u} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} (f \theta') = 0.$$

Opérant de même sur les dérivées de x et de y tirées des équations (6), on obtient les nouvelles relations

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} (f \cos \theta) + \frac{fg \sin \theta}{\rho_u} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} (f \theta') - \frac{\partial}{\partial v} (f \sin \theta) + fg \left(\theta' + \frac{1}{\rho_v} + \frac{\cos \theta}{\rho_u} \right) = 0. \end{cases}$$

Si l'on part des relations (5) et que l'on opère de même, on arrive aux formules suivantes, très simples,

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{fy}{\rho_v} = 0, & \frac{\partial y}{\partial u} + f + \frac{fx}{\rho_v} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} + g - \frac{gx}{\rho_u} = 0, & \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{gx}{\rho_u} = 0. \end{cases}$$

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{\partial l}{\partial u} - \frac{fm}{\rho_v} = 0, & \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{fl}{\rho_v} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial v} - \frac{gm}{\rho_u} = 0, & \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{gl}{\rho_u} = 0. \end{cases}$$

Ces formules constituent l'extension au cas des coordonnées

curvilignes orthogonales des formules de Cesaro, qui n'avaient été données jusqu'ici que pour le cas des coordonnées rectilignes orthogonales. Elles vont nous mener à des relations connues qui sont, en quelque sorte, les formules fondamentales de la théorie des surfaces de Codazzi, dans le cas où la surface de référence est plane. La méthode qui y conduit est d'ailleurs identique à celle qui nous a servi à établir les formules fondamentales de la périmorphie et les formules de Codazzi (*Bulletin de la Société Mathématique*, 1894).

Opérons sur les formules (6') et (7'), comme nous l'avons fait sur les formules (6) et (7); nous obtenons

$$(8') \quad f \frac{\partial \frac{1}{\varphi_v}}{\partial v} - g \frac{\partial \frac{1}{\varphi_u}}{\partial u} + \frac{1}{\varphi_v} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{\varphi_u} \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

$$(9') \quad \frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{fg}{\varphi_u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{fg}{\varphi_v}.$$

Au moyen des relations (9'), la relation (8') peut s'écrire

$$(10) \quad f \frac{\partial \frac{1}{\varphi_v}}{\partial v} - g \frac{\partial \frac{1}{\varphi_u}}{\partial u} + \frac{fg}{\varphi_v^2} + \frac{fg}{\varphi_u^2} = 0,$$

et, si l'on pose

$$f du = ds_u, \quad g dv = ds_v,$$

la relation (10) devient

$$(11) \quad -\frac{\frac{\partial \frac{1}{\varphi_u}}{\partial u} du}{ds_u} + \frac{\frac{\partial \frac{1}{\varphi_v}}{\partial v} dv}{ds_v} + \frac{1}{\varphi_v^2} + \frac{1}{\varphi_u^2} = 0.$$

Elle ne diffère que par les notations de celle qui a été découverte par Lamé (voir *Journal de l'École Polytechnique*, XXIX^e Cahier, p. 157, et BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel*, p. 544).

Observons enfin que les relations (9'), donnant les expressions des rayons de courbure φ_u et φ_v en fonction des coefficients de l'élément linéaire, conduisent immédiatement aux théorèmes établis par M. Bertrand dans son *Traité de Calcul différentiel*, p. 541 et suivantes.

SUR UN THÉORÈME DE STIELTJES ET SUR LES FONCTIONS DÉFINIES
PAR DES FRACTIONS CONTINUES;

Par M. H. VON KOCH.

I.

Je me propose de démontrer d'abord ce théorème :

Si $h_1, h_2, \dots$ sont des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \dots, x_k$, holomorphes dans un domaine donné T, si la série

$$(1) \quad \sum_{\nu} |h_{\nu}|$$

converge uniformément dans ce domaine, et si

$$\frac{P_n(x_1, \dots, x_k)}{Q_n(x_1, \dots, x_k)}$$

désigne la n^{ième} réduite de la fraction continue

$$(2) \quad \frac{1}{h_1 + \frac{1}{h_2 + \frac{1}{h_3 + \dots}}}$$

on a, pour tout le domaine T,

$$\lim P_{2n}(x_1, \dots, x_k) = P(x_1, \dots, x_k),$$

$$\lim Q_{2n}(x_1, \dots, x_k) = Q(x_1, \dots, x_k),$$

$$\lim P_{2n+1}(x_1, \dots, x_k) = P_1(x_1, \dots, x_k),$$

$$\lim Q_{2n+1}(x_1, \dots, x_k) = Q_1(x_1, \dots, x_k),$$

P, Q, P₁, Q₁ désignant des fonctions holomorphes dans T qui satisfont à la relation

$$Q(x_1, \dots, x_k) P_1(x_1, \dots, x_k) - Q_1(x_1, \dots, x_k) P(x_1, \dots, x_k) = 1.$$

On voit que ce théorème embrasse comme cas particulier le théorème de Stieltjes (1) relatif à l'oscillation de la fraction con-

(1) STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VIII, 1894).

tinue (2) dans le cas où l'on a

$$h_{2n} = \alpha_{2n}, \quad h_{2n+1} = \alpha_{2n+1} z,$$

les α_i étant des constantes réelles et positives et z une variable complexe.

Pour la démonstration, remarquons que les formules de récurrence

$$(3) \quad \begin{cases} Q_\rho = h_\rho Q_{\rho-1} + Q_{\rho-2} & (Q_0 = 1, Q_{-1} = 0) \\ & (\rho = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

mettent en évidence que $Q_{\rho+2p}$ se réduit identiquement à Q_ρ , quand on y fait

$$h_{\rho+2p} = h_{\rho+2p-1} = \dots = h_{\rho+1} = 0.$$

Or, dans le développement du produit

$$\prod_{\nu=1}^{\rho+2p} (1 + h_\nu),$$

on retrouve tous les termes du polynôme $Q_{\rho+2p}$. Donc, puisque ce produit se réduit à

$$\prod_{\nu=1}^{\rho} (1 + h_\nu),$$

quand on y fait $h_{\rho+2p} = \dots = h_{\rho+1} = 0$, on aura nécessairement

$$(4) \quad Q'_{\rho+2p} - Q'_\rho \leq \prod_{\nu=1}^{\rho+2p} (1 + |h_\nu|) - \prod_{\nu=1}^{\rho} (1 + |h_\nu|),$$

Q_ν désignant ce que devient le polynôme Q_ν quand on y remplace chaque terme par sa valeur absolue. Or, puisque la série $\sum_\nu |h_\nu|$ est supposée uniformément convergente dans le domaine T , à tout nombre positif ε correspondra un entier positif ρ' tel que le second membre de la formule (4) devienne moindre que ε dès que l'on a $\rho \geq \rho'$, et cela pour tout le domaine T et pour des valeurs quelconques de p ; on aura donc *a fortiori*

$$|Q_{\rho+2p} - Q_\rho| \leq Q'_{\rho+2p} - Q'_\rho < \varepsilon;$$

donc les deux séries

$$1 + \sum_{\nu=1}^{+\infty} (Q_{2\nu} - Q_{2\nu-2}), \quad \sum_{\nu=0}^{+\infty} (Q_{2\nu+1} - Q_{2\nu-1})$$

convergent uniformément dans T et représentent, par suite, certaines fonctions $Q(x_1, \dots, x_k)$ et $Q_1(x_1, \dots, x_k)$ holomorphes dans ce domaine, ce qui prouve bien que les limites

$$\lim Q_{2n} = Q, \quad \lim Q_{2n+1} = Q_1$$

sont des fonctions holomorphes dans T.

Puisque les P_ρ satisfont à des formules de récurrence de la même forme

$$P_\rho = h_\rho P_{\rho-1} + P_{\rho-2} \quad (P_0 = 0, P_{-1} = 1) \\ (\rho = 1, 2, 3, \dots),$$

on voit de la même manière que l'on a, pour tout le domaine T,

$$\lim P_{2n} = P, \quad \lim P_{2n+1} = P_1,$$

P et P_1 étant des fonctions de $x_1, \dots, x_k$ holomorphes dans T.

Vu que les fonctions $Q_{2n}, P_{2n}, Q_{2n+1}, P_{2n+1}$ sont liées par l'identité

$$Q_{2n} P_{2n+1} - Q_{2n+1} P_{2n} = 1,$$

il est clair que leurs limites Q, P, Q_1, P_1 y satisfont également :

$$Q P_1 - Q_1 P = 1.$$

Le théorème est donc démontré.

Remarquons enfin que le polynôme Q_ρ , écrit sous la forme d'un déterminant d'ordre ρ

$$Q_\rho = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & & & \\ -1 & h_2 & 1 & & \\ & -1 & h_3 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & h_\rho \end{vmatrix}$$

fournit le premier exemple d'un déterminant infini qui prend deux valeurs différentes Q et Q_1 selon que son ordre indéfiniment croissant ρ est assujéti à rester pair ou impair.

II.

Dans une lettre à M. Poincaré, dont un extrait a été publié récemment (1), j'ai démontré, entre autres, deux théorèmes, qui pourront être énoncés en ces termes :

I. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sont des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_k$, si ces fonctions sont holomorphes dans un domaine continu donné T, et si la série

$$(5) \quad \sum_v |\varphi_v|$$

converge uniformément dans ce domaine, la fraction continue

$$(6) \quad \frac{\varphi_1}{1 + \frac{\varphi_2}{1 + \frac{\varphi_3}{1 + \dots}}}$$

représente une fonction $\Theta(x_1, \dots, x_k)$ qui, dans tout le domaine T, reste méromorphe et peut s'exprimer par le quotient de deux fonctions $\varphi_1 \Delta'$ et Δ holomorphes dans T.

II. Soit T_1 un domaine continu quelconque situé tout entier en dedans de T et tel que la somme S de la série

$$(7) \quad S = \sum_{v=2}^{+\infty} |\varphi_v|$$

γ satisfasse à la condition

$$(8) \quad S < \rho,$$

ρ désignant un nombre positif suffisamment petit. Dans tout ce domaine T_1 , la fonction $\Theta(x_1, \dots, x_k)$, définie par la fraction continue (6), restera nécessairement holomorphe.

(1) Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues. Extrait d'une lettre de M. H. von Koch à M. Poincaré. (Comptes rendus, 21 janvier 1895.)

Dans l'énoncé précédent, Δ désigne le déterminant infini

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ -\varphi_2 & 1 & & & \\ & -\varphi_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{vmatrix},$$

et Δ' ce que devient Δ quand on y supprime la première ligne et la première colonne; ces déterminants infinis Δ et Δ' convergent absolument et uniformément en dedans du domaine T, d'après deux lemmes que j'ai énoncés dans la Note citée plus haut et dont j'ai donné les démonstrations, d'ailleurs très simples, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Stockholm, le 13 février 1895.

Dans la première Note, j'ai montré que le théorème II reste certainement vrai si l'on pose, dans l'inégalité (8), $\rho = \frac{1}{2}$; dans la seconde, j'ai remplacé cette limite par la suivante :

$$\rho = \log 2 = 0,69314718\dots$$

Je me propose maintenant d'étendre ces résultats en démontrant que le théorème II reste encore vrai si l'on pose, dans l'inégalité (8),

$$\rho = 1.$$

Pour cela, il faut d'abord démontrer le lemme suivant :

Si $b_2, b_3, \dots$ sont des nombres positifs quelconques, la fraction continue d'ordre ν

$$(9) \quad \frac{1}{1 - \frac{tb_2}{1 - \frac{tb_3}{1 - \dots 1 - \frac{tb_{\nu-1}}{1 - tb_{\nu}}}}}$$

représente une fonction $f(t)$ développable sous la forme

$$f(t) = 1 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots,$$

f_ν désignant un certain polynôme homogène, à coefficients en-

tiers et positifs, et de degré ν par rapport à $b_2, \dots, b_\nu$, qui satisfait à l'inégalité

$$(10) \quad f_\lambda < (b_2 + b_3 + \dots + b_\nu)^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \dots).$$

En effet, supposons ce théorème valable pour une fraction de la forme (9) d'ordre $\nu - 1$; nous aurons

$$\frac{1}{1 - \frac{tb_3}{1 - \frac{tb_4}{1 - \dots - \frac{tb_{\nu-1}}{1 - tb_\nu}}}} = \psi(t) = 1 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \dots,$$

ψ_λ étant un polynôme homogène, à coefficients entiers et positifs et de degré λ par rapport à $b_3, b_4, \dots, b_\nu$.

De là on conclut qu'en posant

$$f(t) = \frac{1}{1 - tb_2 \psi(t)} = 1 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots$$

les f_λ seront de pareils polynômes par rapport à $b_2, b_3, \dots, b_\nu$. Il reste seulement à démontrer l'inégalité (10).

Par hypothèse, les ψ_λ satisfont aux conditions

$$\psi_\lambda < B^\lambda,$$

où l'on a posé $B = b_3 + b_4 + \dots + b_\nu$. Donc les coefficients dans le développement de la fonction $f(t)$ seront moindres que les coefficients correspondants dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{1 - \frac{tb_2}{1 - tB}} = \frac{1 - tB}{1 - t(b_2 + B)};$$

done, *a fortiori*, ils seront moindres que les coefficients dans le développement de

$$\frac{1}{1 - t(b_2 + B)},$$

ce qui conduit bien à l'inégalité (10).

Le lemme, étant visiblement vrai pour une fraction d'ordre 3, se trouve donc démontré dans le cas général.

Revenons à l'étude de la fraction (6), les φ_ν étant des fonctions

de $x_1, \dots, x_k$ telles que la série $\Sigma |\varphi_v|$ converge uniformément dans T ; supposons de plus*

$$(11) \quad S = \sum_{v=2}^{+\infty} |\varphi_v| < 1$$

dans tout le domaine T_1 .

Au lieu de (6), considérons pour un instant la fraction suivante (t désignant une variable auxiliaire)

$$F(t) = \frac{1}{1 - \frac{t\varphi_2}{1 - \frac{t\varphi_3}{1 - \dots}}}$$

et désignons la $v^{\text{ième}}$ réduite de cette fraction par $F_v(t)$; d'après ce que nous savons, $F(t)$ et $F_v(t)$ sont des fonctions holomorphes dans un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon R suffisamment petit. Or la relation

$$F(t) - F_v(t) = t^v \frac{\varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_{v+1}}{N_v [N_{v+1} + N_v F^{(v+2)}]},$$

où l'on a posé

$$F^{(v+2)} = - \frac{t\varphi_{v+2}}{1 - \frac{t\varphi_{v+3}}{1 - \dots}}, \quad N_v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ t\varphi_2 & 1 & 1 & & \\ & t\varphi_3 & 1 & 1 & \\ & & . & . & . \\ & & & t\varphi_v & 1 \end{vmatrix},$$

montre que le développement de $F(t) - F_v(t)$ commence par un terme en t^v ; en d'autres termes, si l'on pose

$$F(t) = 1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots,$$

$$F_v(t) = 1 + A_1^{(v)} t + A_2^{(v)} t^2 + \dots,$$

on a

$$A_1 = A_1^{(v)}, \quad A_2 = A_2^{(v)}, \quad \dots, \quad A_{v-1} = A_{v-1}^{(v)}.$$

Mais, d'après le lemme démontré tout à l'heure, on a

$$|A_k^{(v)}| < (|\varphi_2| + |\varphi_3| + \dots + |\varphi_v|)^\lambda.$$

On a donc, d'une manière générale,

$$|A_\lambda| < S^\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots).$$

Désignons maintenant par $\Theta_v(x_1, \dots, x_k)$ la $v^{\text{ème}}$ réduite de la fraction (6). Nous aurons

$$\Theta_v(x_1, \dots, x_k) = \varphi_1 F_v(-1),$$

d'où, en vertu de ce qui vient d'être établi et de l'inégalité (11),

$$|\Theta_{v+p}(x_1, \dots, x_k) - \Theta_v(x_1, \dots, x_k)| < 2 |\varphi_1| \frac{S^v}{1-S},$$

p désignant un entier positif quelconque. Par là on voit donc que, tant que les variables $x_1, \dots, x_k$ restent dans le domaine T_1 satisfaisant à la condition (11), la réduite $\Theta_v(x_1, \dots, x_k)$ tendra uniformément vers une limite $\Theta(x_1, \dots, x_k)$ et que cette limite représente, dans tout le domaine T_1 , une fonction *holomorphe* de $x_1, \dots, x_k$.

EXTENSION DU THÉORÈME DE FERMAT SUR LES NOMBRES POLYGONES;

Par M. ED. MAILLET.

I.

On sait que les nombres polygones d'ordre m sont de la forme

$$\frac{m}{2} (x^2 - x) + x,$$

où x est un entier quelconque.

Cauchy ⁽¹⁾ a pu démontrer le théorème de Fermat sur les nombres polygones en s'appuyant sur le lemme suivant :

Lemme. — Soient k un nombre impair pris à volonté, et s un autre nombre impair compris entre les limites

$$(1) \quad \sqrt{3k-2} - 1, \quad \sqrt{4k}.$$

On pourra toujours résoudre simultanément en nombres entiers

⁽¹⁾ *Exerc. de Math.*, t. I, p. 273, et *Mémoires de l'Institut*.

les deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} k = t^2 + u^2 + v^2 + w^2, \\ s = t + u + v + w. \end{cases}$$

Un lemme semblable ⁽¹⁾ a lieu quand k est impairement pair et s pair quelconque.

Legendre a conclu de ces deux lemmes quelques théorèmes ⁽²⁾ perfectionnant le théorème de Fermat.

On peut remarquer que, plus généralement, des théorèmes semblables ont lieu pour les nombres de la forme

$$\frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} x + \gamma,$$

où $\alpha > 0$, α, β, γ entiers, et où α et β n'ont d'autre diviseur commun que 1 ou 2 et sont à la fois pairs ou impairs. Il suffit évidemment de considérer les nombres

$$(3) \quad \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} x.$$

Les raisonnements étant de tous points semblables à ceux de Legendre, nous pourrions abréger.

Soit un nombre A qui soit la somme de quatre nombres (3)

$$\frac{\alpha}{2} t^2 + \frac{\beta}{2} t, \quad \frac{\alpha}{2} u^2 + \frac{\beta}{2} u, \quad \frac{\alpha}{2} v^2 + \frac{\beta}{2} v, \quad \frac{\alpha}{2} w^2 + \frac{\beta}{2} w.$$

On aura

$$(4) \quad A = \frac{\alpha}{2} k + \frac{\beta}{2} s.$$

Nous ne considérerons que les cas où k et s sont impairs; les cas où k est impairement pair et s pair quelconque se traiteraient de même.

Réciproquement, A étant un nombre donné, si l'on peut déterminer k et s de manière qu'ils soient impairs, et satisfassent à (4) et (1), l'application du lemme précité donnera au moins une décomposition de A en quatre nombres de la forme (3).

⁽¹⁾ LEGENDRE. *Théorie des nombres*, 3^e édit., t. II, p. 338.

⁽²⁾ *Ibid.*, p. 351 et suiv., théorèmes V à IX.

Or les inégalités

$$\sqrt{3k-2} - 1 < s < \sqrt{4k}$$

donnent facilement si $\Lambda > 2\alpha$

$$(5) \quad \frac{-2\alpha - 3\beta + \sqrt{(2\alpha + 3\beta)^2 - 4\alpha(3\alpha - 6\Lambda)}}{2\alpha} < s < \frac{-2\beta + 2\sqrt{\beta^2 + 2\Lambda\alpha}}{\alpha}.$$

On pourra prendre Λ assez grand pour qu'on ait au moins λ valeurs de s impaires consécutives satisfaisant à (5), λ étant arbitraire; il est même facile de trouver une limite inférieure de Λ en fonction de λ .

Soient $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$ ces valeurs, $k_1, k_2, \dots, k_\lambda$ les valeurs correspondantes de k , entières ou non, tirées de (4) :

$$(6) \quad k_i = \frac{2\Lambda - \beta s_i}{\alpha}.$$

Considérons les nombres $2\Lambda - \beta s_i$.

1° α et β sont impairs.

Si l'on a

$$2\Lambda - \beta s_i \equiv 2\Lambda - \beta s_j \pmod{\alpha},$$

il faut, puisqu'ici α et β sont premiers entre eux par hypothèse,

$$s_i - s_j \equiv 0 \pmod{\alpha}.$$

Or, s_i et s_j étant impairs, $s_i - s_j$ est pair; par suite

$$s_i - s_j \equiv 0 \pmod{2\alpha}.$$

Prenant alors

$$\lambda \geq \alpha,$$

on voit que α nombres consécutifs, pris parmi les nombres $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$, donnent des valeurs de $2\Lambda - \beta s_i$ incongrues $\pmod{\alpha}$, et par suite l'un d'eux, s' , est tel que

$$2\Lambda - \beta s' \equiv 0 \pmod{\alpha}.$$

Mais $2\Lambda - \beta s'$ est évidemment impair, en sorte que

$$k' = \frac{2\Lambda - \beta s'}{\alpha}$$

est impair.

L'application du lemme précité à ces valeurs k' , s' donnera une décomposition de A en une somme de quatre nombres de la forme voulue.

Ce procédé donnera évidemment autant de valeurs de k' , s' qu'il y a d'unités dans $\frac{\lambda}{x}$. Donc

THÉORÈME I. — *Si α et β sont impairs et premiers entre eux, tout nombre A , supérieur à une certaine limite fonction de α et β , est la somme de quatre nombres de la forme*

$$\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{2}x \quad (\alpha > 0).$$

On peut même assigner une limite inférieure de A telle que cette décomposition ait lieu de φ manières différentes, φ étant arbitrairement choisi.

Si $\alpha = \frac{m}{2}$, $\beta = \frac{-(m-2)}{2}$, on retrouve le théorème V de Legendre précité.

2° α est impairement pair, β est pair quelconque.

Par hypothèse α et β ont pour plus grand commun diviseur 2.

Si $s_i \equiv s_j \pmod{\alpha}$, $2A - \beta s_i$ et $2A - \beta s_j$ ont même résidu $\pmod{\alpha}$.

Considérons parmi les nombres impairs $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$ où $\lambda \geq \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$ nombres consécutifs et les nombres correspondants de la forme $2A - \beta s_i$. Ces nombres sont pairs et sont incongrus $\pmod{\alpha}$, car

$$2A - \beta s_i \equiv 2A - \beta s_l \pmod{\alpha}$$

donne

$$\frac{\beta}{2} s_i \equiv \frac{\beta}{2} s_l \pmod{\frac{\alpha}{2}}$$

et, puisque $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\alpha}{2}$ sont ici premiers entre eux,

$$s_i \equiv s_l \pmod{\frac{\alpha}{2}},$$

ce qui est impossible, $s_i - s_l$ étant pair et $< \alpha$. Donc l'un de ces nombres $2A - \beta s'$ est $\equiv 0 \pmod{\alpha}$, α étant impairement pair.

$k' = \frac{2\Lambda - \beta s'}{\alpha}$ sera impair si $2\Lambda - \beta s'$ est impairement pair. Par suite

THÉOREME II. — *On a un théorème semblable au théorème I, α étant impairement pair, quand Λ est impair et β pairement pair, et quand Λ est pair et β impairement pair $\left(\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ premiers entre eux*).

L'un de ces deux résultats comporte une extension partielle du théorème VI de Legendre.

3° α est pairement pair, β est impairement pair.

Considérons encore parmi les nombres impairs $s_1, s_2, \dots, s_\lambda$, où $\lambda \geq \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$ nombres consécutifs, et les nombres correspondants de la forme $2\Lambda - \beta s_i$. Les $\frac{\alpha}{4}$ premiers d'entre eux sont incongrus (mod α), car on aurait sans cela

$$\frac{\beta}{2} (s_i - s_l) \equiv 0 \pmod{\frac{\alpha}{2}},$$

d'où

$$s_i - s_l \equiv 0 \pmod{\frac{\alpha}{2}}.$$

Dès lors, si ces $\frac{\alpha}{4}$ nombres sont tous $\equiv 0 \pmod{4}$, ou si Λ est impair, l'un d'eux $2\Lambda - \beta s'$ est $\equiv 0 \pmod{\alpha}$, et

$$k' = \frac{2\Lambda - \beta s'}{\alpha}.$$

Si k' est impair on obtient une décomposition cherchée du nombre Λ . Si k' est pair on considérera

$$s'' = s' + \frac{\alpha}{2}$$

et

$$k'' = \frac{2\Lambda - \beta \left(s' + \frac{\alpha}{2}\right)}{\alpha} = \frac{2\Lambda - \beta s'}{\alpha} - \frac{\beta}{2} = k' - \frac{\beta}{2};$$

k'' sera impair et l'on obtiendra encore la décomposition cherchée. Donc :

THÉORÈME III. — *On a un théorème semblable au théorème I, quand α est pair, β impair et Δ impair ($\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ premiers entre eux).*

Ce résultat, joint à l'un de ceux obtenus au théorème II, équivaut à une extension complète du théorème VI de Legendre.

Il nous suffira maintenant d'indiquer qu'en appliquant le second des lemmes précités on obtiendra par la même méthode des résultats du même genre comportant des extensions des théorèmes VII, VIII et IX de Legendre.

II.

Des résultats analogues peuvent s'obtenir pour les nombres de la forme

$$\frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} x^2.$$

Il suffit de s'appuyer sur le théorème suivant ⁽¹⁾, dû à Liouville :

THÉORÈME. — *Soit $2n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$; si l'on pose*

$$(7) \quad \begin{cases} 2x_1 = x + y + z + t, & 2x_2 = -x + y + z + t, \\ 2y_1 = x + y - z - t, & 2y_2 = -x + y - z - t, \\ 2z_1 = x - y + z - t, & 2z_2 = -x - y + z - t, \\ 2t_1 = x - y - z + t, & 2t_2 = -x - y - z + t, \end{cases}$$

les nombres

$$x_1, y_1, z_1, t_1; \quad x_2, y_2, z_2, t_2$$

seront entiers aussi bien que x, y, z, t , et l'on aura, en posant

$$\Sigma x^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 :$$

$$(8) \quad \Sigma x^2 = \Sigma x_1^2 = \Sigma x_2^2,$$

$$(9) \quad 6n^2 = \Sigma x^4 + \Sigma x_1^4 + \Sigma x_2^4.$$

Liouville en a tiré ce corollaire :

(1) Voir LE BESGUE, *Exercices d'Analyse numérique*, librairie Leiber et Faraquet, Paris, 1859, p. 113.

Corollaire. — Tout nombre est la somme de δ bicarrés au plus ($\delta \leq 53$).

En effet, soit $6k + r$, ($r \leq 5$), un nombre quelconque; on sait qu'on a

$$(10) \quad k = f^2 + g^2 + h^2 + e^2,$$

et en remarquant que r est la somme d'au plus 5 bicarrés égaux à l'unité, et appliquant la formule (9), on obtient $6k + r$ sous la forme d'une somme d'au plus 53 bicarrés.

Mais l'on peut en tirer quelque chose de plus.

D'après (8) et (9), le théorème précédent donne

$$6n^2 = \Sigma x^4 + \Sigma x_1^4 + \Sigma x_2^4,$$

$$6n = \Sigma x^2 + \Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2$$

simultanément.

On aura donc simultanément

$$(11) \quad \begin{cases} 6f^2 = \Sigma x^4 + \Sigma x_1^4 + \Sigma x_2^4, & 6f = \Sigma x^2 + \Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2, \\ 6g^2 = \Sigma x'^4 + \Sigma x_1'^4 + \Sigma x_2'^4, & 6g = \Sigma x'^2 + \Sigma x_1'^2 + \Sigma x_2'^2, \\ 6h^2 = \Sigma x''^4 + \Sigma x_1''^4 + \Sigma x_2''^4, & 6h = \Sigma x''^2 + \Sigma x_1''^2 + \Sigma x_2''^2, \\ 6e^2 = \Sigma x'''^4 + \Sigma x_1'''^4 + \Sigma x_2'''^4, & 6e = \Sigma x'''^2 + \Sigma x_1'''^2 + \Sigma x_2'''^2. \end{cases}$$

D'ailleurs, l'unité étant à la fois un bicarré et un carré, on voit que les deux nombres

$$6(f^2 + g^2 + h^2 + e^2) + r, \quad 6(f + g + h + e) + r$$

seront respectivement la somme de δ bicarrés et carrés correspondants.

La forme de ces nombres suggère de suite l'idée d'appliquer les lemmes précités de Cauchy et Legendre : nous nous contenterons d'appliquer le lemme de Cauchy.

D'après ce lemme on peut déterminer f , g , h et e de façon que (10) ait lieu en même temps que

$$(12) \quad l = f + g + h + e,$$

k et l étant impairs, pourvu que

$$(13) \quad \sqrt{3k-2} - 1 < l < \sqrt{4k}.$$

Dès lors, posant

$$(14) \quad \begin{cases} 3\Lambda = \frac{\alpha}{2} 6k + \frac{\beta}{2} 6l \\ \text{ou} \\ \Lambda = \alpha k + \beta l \end{cases}$$

($\alpha > 0$ et β étant à la fois pairs ou impairs et n'ayant d'autre commun diviseur que 1 ou 2), si l'on peut déterminer k et l entiers impairs et satisfaisant à (13) et (14), le nombre 3Λ sera la somme de $\delta - 5$ nombres de la forme

$$(15) \quad \frac{\alpha}{2} x^2 + \frac{\beta}{2} x^2$$

et, en posant

$$(16) \quad r' = \frac{\alpha}{2} r + \frac{\beta}{2} r = r \frac{\alpha + \beta}{2},$$

le nombre $3\Lambda + r'$ sera la somme de $\delta - 5 + r$ nombres de la même forme (15).

D'abord on voit encore, par des inégalités analogues à (5), qu'on peut prendre Λ assez grand pour qu'on ait au moins λ valeurs impaires consécutives de l satisfaisant à (13), λ étant arbitrairement choisi.

Soient $l_1, l_2, \dots, l_\lambda$ ces valeurs, $k_1, k_2, \dots, k_\lambda$ les valeurs correspondantes de k , entières ou non, tirées de (14).

1° α et β sont impairs.

En prenant $\lambda \geq \alpha$ et Λ pair, on trouve encore une valeur de k entière et impaire, telle que (14) ait lieu.

Tout nombre pair 3Λ est donc ici décomposable en $\delta - 5$ nombres de la forme (15). Les nombres $3\Lambda + r'$ (Λ pair) sont décomposables, d'après (16), en δ nombres au plus de la forme (15) et l'on peut dire :

THÉORÈME V. — Soient α et β entiers impairs et premiers entre eux; suivant que $\frac{\alpha + \beta}{2}$ aura avec 6 pour plus grand commun diviseur 1, 2, 3 ou 6, on peut prendre a' assez grand pour que tout nombre de la forme $6a + r'$, avec respectivement $a \geq a'$.

r'' égal à

0, 1, 2, 3, 4, 5
0, 2, 4
0, 3
0,

soit la somme d'au plus δ nombres de la forme

$$\frac{\alpha}{2} x^4 + \frac{\beta}{2} x^2 \quad (\delta \leq 53).$$

2° α est impairement pair, β est pair.

A est pair; on pourra encore trouver l impair et tel que $A - \beta l \equiv 0 \pmod{\alpha}$. Alors

$$k = \frac{A - \beta l}{\alpha}$$

sera impair si $A - \beta l$ est impairement pair.

De plus, ici, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ sera pair ou impair suivant que β sera impairement ou pairement pair.

THÉOREME V. — Soient α impairement pair, β pair et $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ premiers entre eux.

Quand β est pairement pair, suivant que $\frac{\alpha + \beta}{2}$, qui est impair, aura avec 6 le plus grand commun diviseur 1 ou 3, on peut prendre a' assez grand pour que tout nombre de la forme $6a + r''$ avec $a \geq a'$ et respectivement r'' égal à

0, 1, 2, 3, 4, 5
0, 3,

soit la somme d'au plus δ' nombres de la forme

$$\frac{\alpha}{2} x^4 + \frac{\beta}{2} x^2 \quad (\delta' \leq 59).$$

Quand β est impairement pair, suivant que $\frac{\alpha + \beta}{2}$, qui est pair, aura avec 12 le plus grand commun diviseur 2, 4, 6 ou 12, on peut prendre a' assez grand pour que tout nombre de la

forme $2(6a + r'')$ avec $a \geq a'$ et respectivement r'' égal à

$$\begin{array}{l} 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5 \\ 0, \quad 2, \quad 4 \\ 0, \quad 3 \\ 0 \end{array}$$

soit la somme d'au plus δ nombres de la forme

$$\frac{\alpha}{2} x^4 + \frac{\beta}{2} x^2, \quad (\delta \leq 53).$$

3° α pairement pair, β impairement pair.

On peut encore trouver l impair et tel que $A - \beta l \equiv 0 \pmod{\alpha}$, si A impairement pair. Si

$$k = \frac{A - \beta l}{\alpha}$$

n'était pas impair, en posant $l' = l + \frac{\alpha}{2}$,

$$k' = \frac{A - \beta l}{\alpha} - \frac{\beta}{2} = k - \frac{\beta}{2}$$

est impair.

Ici $\frac{\alpha + \beta}{2}$ est impair.

THÉORÈME VI. — Soient α pairement pair, β impairement pair et $\frac{\alpha}{2}$ et $\frac{\beta}{2}$ premiers entre eux : suivant que $\frac{\alpha + \beta}{2}$, qui est impair, aura avec 6 le plus grand commun diviseur 1 ou 3, on peut prendre a' assez grand pour que tout nombre de la forme $6a + r''$ avec $a \geq a'$ et respectivement r'' égal à

$$\begin{array}{l} 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5 \\ 0, \quad 3, \end{array}$$

soit la somme d'au plus δ' nombres de la forme

$$\frac{\alpha}{2} x^4 + \frac{\beta}{2} x^2, \quad (\delta' \leq 59).$$

SUR CERTAINES ÉQUATIONS QU'ON INTÈGRE EN LES DIFFÉRENTIANT;

Par M. L. RAFFY.

1. Étant donnée une équation du premier ordre

$$(1) \quad y = \varphi(x, p).$$

son intégration revient, comme on sait, à celle de l'équation dérivée

$$(2) \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx}.$$

Si l'on connaît, en effet, l'intégrale générale

$$(3) \quad F(x, p, C) = 0$$

de cette dernière, il suffit, pour avoir celle de l'équation (1), d'éliminer p entre les équations (1) et (3). On a pu ainsi intégrer les équations dites de Lagrange

$$y = xf(p) + \psi(p),$$

dont un cas particulier est l'équation de Clairaut où $f(p) = p$.

Euler (1) a cherché quelle doit être la fonction $\varphi(x, p)$ pour que l'équation dérivée (2) soit d'une forme qui permette de l'intégrer, en particulier pour qu'elle soit homogène ou linéaire. Mais ses solutions, plus intuitives que raisonnées, sont loin d'être complètes. Voici, par exemple, le raisonnement qu'il a dû esquisser à propos de l'équation (2) supposée linéaire, mais qu'il supprime.

Si l'équation (2) est linéaire, son intégrale générale est de la forme

$$(3)' \quad x = C P'(p) + \pi'(p).$$

On aura donc

$$y = \int p \, dx = px - \int x \, dp,$$

(1) *Institutiones Calculi integralis*, t. I, Sect. III, n° 695 à la fin.

ou bien

$$y = p(CP' + \pi') - (CP + \pi),$$

ou, en tirant C de l'intégrale (3)'.

$$y = x \left(p - \frac{P}{P'} \right) + \frac{P\pi' - \pi P'}{P'}.$$

Il semble d'après cela, comme l'affirme Euler, que l'équation de départ doive définir y comme fonction linéaire de x à coefficients arbitraires en p ; en d'autres termes, que ce soit une équation de Lagrange.

Cette conclusion implique essentiellement que l'équation (2) n'ait pas d'autres solutions que celles que fournit la formule (3)', et, comme une équation linéaire n'a pas de solutions singulières, cela revient à supposer que l'équation (2) ne se décompose pas en deux autres dont l'une serait une équation linéaire. Or, soit l'équation

$$(1)' \quad y = px + x^2\psi(p).$$

En la différentiant, on trouve

$$x \left[2\psi(p) \frac{dx}{dp} + x\psi'(p) + 1 \right] = 0.$$

Elle conduit donc à une équation linéaire, bien que y ne soit pas une fonction linéaire de x . On trouvera plus loin des exemples plus généraux où pareil fait se produit. Il y a donc lieu de reprendre la question par un procédé propre à la résoudre complètement.

2. Voici comment nous énoncerons le problème :

Déterminer le second membre de l'équation

$$(1) \quad y = \varphi(x, p).$$

de manière que l'équation dérivée

$$(2) \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx}$$

assigne à $\frac{dp}{dx}$ une forme analytique donnée à l'avance $F(x, p)$.

Comme l'équation (2) donne

$$(4) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\varphi'_x}{\varphi'_p}}{\varphi'_p}$$

et que nous supposons

$$(5) \quad \frac{dp}{dx} = \psi(x, p),$$

on voit que la solution dépend de l'équation aux dérivées partielles

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi(x, p) \frac{\partial \varphi}{\partial p} = p.$$

En traitant le problème de cette façon, nous n'excluons pas la possibilité de l'existence d'un facteur commun aux deux termes de la fraction (4) qui représente $\frac{dp}{dx}$, de sorte que notre équation (2) pourra se décomposer.

Nous avons maintenant à intégrer l'équation (6) qui revient au système

$$(7) \quad \frac{dx}{1} = \frac{dp}{\psi(x, p)} = \frac{d\varphi}{p}.$$

En égalant les deux premiers rapports, nous retrouvons l'équation (5) qui est supposée intégrable. Soit

$$(8) \quad \chi(x, p) = \alpha$$

son intégrale générale résolue par rapport à la constante. D'après la théorie connue, l'expression générale de φ sera de la forme

$$\varphi(x, p) = F[\chi(x, p)] + \int p \, dx,$$

où p devra être tiré de l'équation $\chi = \alpha$ et où l'on devra, l'intégration faite, remplacer α par $\chi(x, p)$; le symbole F désigne une fonction arbitraire de χ .

La solution la plus générale de notre problème comporte donc une fonction arbitraire, en outre de celles qu'on peut avoir introduites par avance dans l'intégrale (8) qu'on se donne.

Quant à l'équation différentielle proposée, elle a pour intégrale

générale

$$y = F(x) + \int p(x, z) dx,$$

p étant tiré de la relation $\gamma(x, p) = z$.

Nous allons faire quelques applications de ces principes.

3. Cherchons d'abord quelle doit être la forme la plus générale de l'équation (1) pour que dans l'équation dérivée (2) il y ait *séparation des variables* p et x : P' , si l'on désigne par P une fonction de p seulement et par P' sa dérivée.

Posons $x = P't$ et écrivons la relation entre t et p , qui est par hypothèse de la forme

$$(9) \quad T(t) + \varpi(p) = z.$$

D'après ce qui précède, nous devons prendre

$$\varphi(x, p) = F(T + \varpi) + \int p dx = F(T + \varpi) + px - \int P't dp.$$

On sait que t doit être tiré de l'équation $T + \varpi = z$ et qu'après l'intégration z devra être remplacé par $T + \varpi$.

Pour mettre le résultat sous forme entièrement explicite, nous restreindrons sa généralité (qui restera fort grande encore) en supposant $\varpi = P$; en même temps, remplaçons T par une dérivée τ' . L'équation (9) équivaut alors à $\tau'' dt + P' dp = 0$, et il vient

$$\varphi(x, p) = F(\tau' + P) + px + \int \tau'' t dt = F(\tau' + P) + px + \tau' t - \tau;$$

d'où l'on tire, en chassant la variable auxiliaire t , une classe étendue d'équations répondant à la question :

$$(10) \quad y = F \left[\tau' \left(\frac{x}{P'} \right) + P(p) \right] + px + \frac{x}{P'} \tau' \left(\frac{x}{P'} \right) - \tau \left(\frac{x}{P'} \right).$$

On peut se donner arbitrairement les trois fonctions P , τ et F . En différentiant, on trouve

$$\left(\frac{x}{P'} + F' \right) (d\tau' + dP) = 0,$$

ce qui vérifie notre analyse et met en évidence un facteur conduisant à une solution singulière.

Signalons, en passant, l'hypothèse où la fonction F serait proportionnelle à son argument; elle donne l'équation

$$y = px + mP + \psi\left(\frac{x}{P}\right),$$

analogue à celle de Clairaut, mais plus générale, et dans laquelle rentre, entre autres, l'équation différentielle des coniques homofocales.

4. Le type (10) contient en particulier toutes les équations dont la différentiation conduit à une *équation homogène entre x et p* . En effet, dans une telle équation, il y a séparation des variables p et $x : p$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dt}{f(t) - t} = 0, \quad \left(t = \frac{x}{p}\right);$$

d'où l'intégrale

$$\log p - \log \tau = -\log \alpha, \quad \frac{\tau}{p} = \alpha.$$

Nous devons donc prendre pour les fonctions P , ϖ et T précédemment introduites les expressions suivantes

$$P = p, \quad \varpi = -\log p, \quad T = \log \tau.$$

Nous trouvons ainsi

$$\varphi(x, p) = F\left(\frac{\tau}{p}\right) + px - \int t p dp = F\left(\frac{\tau}{p}\right) + px - \frac{1}{\alpha^2} \int t \tau d\tau.$$

Pour arriver à une forme entièrement explicite, il convient de poser

$$\tau(t) = \sqrt{\theta'(t)},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi(x, p) &= F\left(\frac{\sqrt{\theta'}}{p}\right) + px - \frac{1}{2\alpha^2} \int t \theta'' dt \\ &= F\left(\frac{\sqrt{\theta'}}{p}\right) + px - \frac{1}{2\alpha^2} (t\theta' - t), \end{aligned}$$

ou, en chassant α et x ,

$$\varphi(x, p) = F\left(\frac{\sqrt{\theta'}}{p}\right) + \frac{p^2(\theta t)'}{2\theta'}.$$

Ainsi, toutes les équations dont la différentiation conduit à une équation homogène entre x et p sont contenues dans le

type

$$(11) \quad y = F\left(\frac{\eta'}{p^2}\right) + \frac{p^2(\eta t)'}{2\eta'}, \quad \left(t = \frac{x}{p}\right),$$

où η désigne une fonction arbitraire de t , et F une fonction arbitraire de son argument. Les accents indiquent des dérivées.

Si l'on supprime la fonction F , le second membre se réduit à une fonction homogène et du second degré de x et de p , quelconque d'ailleurs, ce qui est la solution d'Euler (*loc. cit.*). On voit que cette solution n'est pas la seule. On en obtient une autre, particulière aussi, mais d'une généralité non moindre, en prenant

$$\eta = \frac{1}{t - h}, \quad (h = \text{const.}),$$

ce qui conduit à l'équation

$$y = f(x - hp) + \frac{hp^2}{2},$$

dont l'intégrale générale est

$$y = f(z) + \frac{(x - z)^2}{2h};$$

la fonction f reste entièrement arbitraire.

Signalons en passant une équation analogue aux précédentes :

$$y = \frac{px}{2} + \varphi_n(x, p),$$

le symbole φ_n désignant une fonction homogène et du degré n en x et p . Si on l'écrit

$$y = \frac{tp^2}{2} + p^n T(t), \quad \left(t = \frac{x}{p}\right),$$

la différentiation conduit à celle-ci

$$\frac{n}{n-2} T \frac{d}{dt} p^{n-2} + T' p^{n-2} - \frac{1}{2} = 0,$$

qui est linéaire par rapport à p^{n-2} . L'hypothèse $n = 2$ ramène naturellement à une équation homogène entre x et p .

§. Cherchons maintenant de quelle forme doit être l'équation (1) pour que son équation dérivée soit *linéaire en p*.

La relation entre p et x est, par hypothèse,

$$p = \alpha X'(x) + \xi'(x).$$

Nous devons, d'après la théorie générale, prendre

$$\varphi(x, p) = F\left(\frac{p - \xi'}{X'}\right) + \int p dx = F\left(\frac{p - \xi'}{X'}\right) + \alpha X + \xi,$$

d'où, en chassant α , on déduit l'équation

$$(12) \quad \gamma = F\left(\frac{p - \xi'}{X'}\right) + \frac{p - \xi'}{X'} X + \xi,$$

sur laquelle nous n'insisterons pas, parce qu'il suffit de prendre comme variable X et de poser $z = \gamma - \xi$ pour la réduire à

$$z = X \frac{dz}{dX} + F\left(\frac{dz}{dX}\right),$$

ce qui est une équation de Clairaut.

6. Nous formerons enfin les équations dont la différentiation conduit à une équation *linéaire en x , la variable étant p* .

La relation entre x et p est ici

$$x = \alpha P'(p) + \varpi'(p);$$

on devra donc prendre

$$\begin{aligned} \varphi(x, p) &= F\left(\frac{x - \varpi'}{P'}\right) + \int p (\alpha P'' + \varpi'') dp \\ &= F\left(\frac{x - \varpi'}{P'}\right) + \alpha (p P' - P) + p \varpi' - \varpi, \end{aligned}$$

d'où, en chassant α , on déduit la forme générale des équations cherchées :

$$(13) \quad \gamma = F\left(\frac{x - \varpi'}{P'}\right) + x \left(p - \frac{P}{P'}\right) + \frac{P \varpi' - \varpi P'}{P'}.$$

Une transformation analogue à celle de Legendre les ramène à l'équation de Clairaut. Posons en effet $z = \gamma - px + \varpi$ et prenons pour variable, non pas p , mais P ; nous trouverons

$$\frac{dz}{dP} = \frac{1}{P'} \frac{dz}{dp} = - \frac{x - \varpi'}{P'},$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$z = P \frac{dz}{dP} + F_1 \left(\frac{dz}{dP} \right).$$

Néanmoins elle mérite d'être étudiée. Occupons-nous d'abord de son intégration. En la différentiant, on trouve

$$\frac{F' - P}{P'} \left[\frac{d(x - \varpi')}{dp} - \frac{P''}{P'} (x - \varpi') \right] = 0,$$

équation qui se décompose en deux. Le premier facteur, égalé à zéro, fournit une solution singulière. Le second donne une équation linéaire dont l'intégrale générale est bien

$$x = \alpha P'(p) + \varpi'(p).$$

Celle de la proposée résultera donc de l'élimination de p entre cette dernière équation et la proposée elle-même.

7. Deux cas particuliers doivent être remarqués. Soit d'abord $\varpi = 0$. Il vient ainsi

$$(14) \quad y = \left(p - \frac{P}{P'} \right) x + F \left(\frac{x}{P'} \right),$$

équation qu'on intègre en lui adjoignant la relation

$$\frac{x}{P'} = \alpha.$$

Soit maintenant $P = p$; on a ainsi l'équation

$$(15) \quad y = p\varpi' - \varpi + F(x - \varpi')$$

qu'on intègre en lui adjoignant la relation

$$x - \varpi' = \alpha.$$

Or, cette dernière donne pour p une fonction de $x - \alpha$, de sorte que l'intégrale générale de (15) est de la forme

$$y = f(x - \alpha) + F(\alpha).$$

De là résulte l'existence d'une infinité d'équations du type (15) qu'on intègre en y remplaçant la dérivée p par une constante arbitraire. Supposons, en effet, les fonctions F et ϖ telles que

l'on ait identiquement

$$(16) \quad p\varpi'(p) - \varpi(p) = F(\varpi').$$

L'équation (15) s'écrira

$$(17) \quad y = F(\varpi') + F(x - \varpi') = \varphi(x, p)$$

et son intégrale générale sera

$$y = F(x - \alpha) + F(\alpha) = \varphi(x, C).$$

L'équation de Clairaut n'est donc pas la seule, comme on l'a cru, qui possède la propriété précitée.

Pour former toutes les équations qui en jouissent et qui rentrent dans le type actuel, nous avons à résoudre l'équation (16), qui est une équation de Clairaut. Si l'on prend pour ϖ son intégrale générale

$$\varpi = cp - F(c),$$

ϖ' se réduira à une constante et l'équation (15) ne sera plus une équation différentielle. Il faut donc recourir à la solution singulière qui, ici comme dans quelques autres cas, est la véritable, et poser $p = F'(\varpi')$. Nous arrivons ainsi à ce théorème :

Toute équation de la forme

$$(17)' \quad y = F[\psi(p)] + F[x - \psi(p)],$$

dans laquelle les fonctions F et ψ sont liées par la relation

$$p = F'[\psi(p)]$$

a pour intégrale générale

$$y = F(x - C) + F(C),$$

c'est-à-dire que, pour l'intégrer, il suffit d'y remplacer p par une constante arbitraire.

Pour établir directement ce résultat, différencions la proposée, ce qui donne

$$p = F'_{x'}(x - \psi) + [F(\psi) - F'_{x'}(x - \psi)] \frac{d\psi}{dx}.$$

En vertu de l'identité $p = F'(\psi)$, cette équation se réduit à

$$(p - F'_x) \left(1 - \frac{d\psi}{dx} \right) = 0;$$

son intégrale générale est $x - \psi = C$ et il n'y a qu'à remplacer ψ par $x - C$ dans l'équation (17)' pour avoir son intégrale déjà écrite.

On voit que l'une des fonctions F et ψ est arbitraire. Si l'on se donne F , on déterminera ψ par l'inversion de l'équation $p = F'(\psi)$. Si l'on se donne ψ , on tirera F' , puis on aura F par une quadrature. Voici quelques exemples de ces deux procédés.

8. *Exemples.* — Donnons-nous d'abord F . Soit en premier lieu $F(u) = e^u$. Nous aurons successivement

$$p = e^\psi, \quad \psi = \log p; \quad y = p + \frac{e^x}{p} = \varphi(x, p).$$

On vérifie aisément que l'intégrale générale est $y = \varphi(x, C)$.

Soit, en second lieu, $F(u) = \log u$. Il viendra

$$p = \frac{1}{\psi}, \quad \psi = \frac{1}{p}, \quad y = \log \frac{1}{p} + \log \left(x - \frac{1}{p} \right) = \varphi(x, p).$$

L'intégrale générale est toujours $y = \varphi(x, C)$.

Dans ces deux exemples, l'équation différentielle est algébrique et du second degré en p . Il est facile d'en former d'autres où elle sera de degré plus élevé. Soit en effet $F(u) = \frac{a^m u^{m+1}}{m+1}$. Nous aurons successivement

$$p = a^m \psi^m, \quad \psi = \frac{p^{\frac{1}{m}}}{a}, \quad y = \frac{1}{(m+1)a} \left[p^{\frac{m+1}{m}} + \left(ax - p^{\frac{1}{m}} \right)^{m+1} \right] = \varphi(x, p).$$

Si m est l'inverse d'un entier positif n , l'équation différentielle sera du degré n^2 . Son intégrale générale est toujours $y = \varphi(x, C)$.

Donnons-nous maintenant ψ . Soit, par exemple,

$$\psi(p) = -\arctan p.$$

L'équation $p = F'(\psi)$ donne $F'(u) = -\tan u$, d'où l'on déduit en intégrant $F(u) = \log \cos u$.

On arrive ainsi à l'équation différentielle

$$y = \log \frac{\cos x - p \sin x}{1 + p^2} = \varphi(x, p),$$

dont l'intégrale générale est $y = \varphi(x, C)$.

9. On pourrait se proposer de *former toutes les équations différentielles du premier ordre dont on obtient l'intégrale en y remplaçant la dérivée par une constante arbitraire*. Comme il est toujours facile de reconnaître si une équation différentielle donnée appartient à cette catégorie, le problème n'offre guère qu'un intérêt de curiosité. Nous allons le ramener à la résolution d'une équation fonctionnelle, d'espèce encore inconnue, je crois, qui en montrera l'indétermination.

Partons de l'équation finie

$$(18) \quad y = \varphi(x, C);$$

on en déduit, par différentiation,

$$(19) \quad p = \varphi'_x(x, C);$$

or, en éliminant C , on trouve par hypothèse

$$(20) \quad y = \varphi(x, p).$$

De là résulte que, si l'on élimine p entre les équations (19) et (20), on doit retrouver la précédente (18). Ainsi l'on a identiquement

$$\varphi[x, \varphi'_x(x, C)] = \varphi(x, C).$$

D'une manière plus précise, la fonction φ pouvant n'être pas uniforme, nous dirons que si, dans l'une des déterminations $\varphi(x, p)$ de la fonction cherchée, on remplace p par la dérivée partielle $\varphi'_x(x, p)$ de cette même détermination, on doit retrouver l'une des déterminations de $\varphi(x, p)$.

C'est là une condition nécessaire, imposée à la fonction φ . Il est aisé de voir qu'elle est suffisante. Soit, en effet, une fonction $\varphi(x, p)$ telle qu'on ait identiquement

$$(21) \quad \varphi[x, \varphi'_x(x, p)] = \varphi(x, p).$$

En différentiant l'équation $y = \varphi(x, p)$, on trouve

$$p = \varphi'_x + \varphi'_p \frac{dp}{dx}.$$

Je dis que l'intégrale générale de cette dernière équation est

$$p = \varphi'_x(x, C)$$

ou que l'on a identiquement

$$\varphi'_x(x, C) = \varphi'_x[x, \varphi'_x(x, C)] + \varphi'_p[x, \varphi'_x(x, C)] \varphi''_{x^2}(x, C).$$

Or c'est là précisément ce qu'on obtient en différentiant par rapport à x l'identité (21) et remplaçant p par C .

Cela posé, l'intégrale de l'équation $y = \varphi(x, p)$ est

$$y = \varphi[x, \varphi'_x(x, C)],$$

ou bien $y = \varphi(x, C)$, en vertu de la même identité.

D'après ce qui précède, nous connaissons une solution de l'équation fonctionnelle (21), savoir

$$\varphi(x, p) = F[\psi(p)] + F[x - \psi(p)],$$

les deux fonctions F et ψ n'étant assujetties qu'à la relation $u = F'[\psi(u)]$.

Pour vérifier directement cette solution, formons l'expression

$$\varphi(x, \varphi'_x) = F\{\psi[F'(x - \psi)]\} + F\{x - \psi[F'(x - \psi)]\}.$$

Or les opérations F' et ψ sont inverses l'une de l'autre : de l'équation $u = F'(v)$ on tire par hypothèse $v = \psi(u)$, ou encore $v = \psi[F'(v)]$. D'après cela l'expression ci-dessus n'est autre que

$$F(x - \psi) + F[x - (x - \psi)] = F(x - \psi) + F(\psi).$$

Nous retrouvons donc $\varphi(x, p)$ comme nous l'avions annoncé.

Si cette solution n'est pas la seule qui vérifie l'équation fonctionnelle ci-dessus, il est peu probable qu'il en existe une plus simple parmi celles qui présentent la même généralité.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 MARS 1895.

PRÉSIDENTE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Bioche : *Sur une valeur approchée de π .*

M. Picard : *Sur l'équation différentielle du premier ordre et du second degré.*

M. Carvallo : *Sur les équations de Lagrange.*

M. Floquet adresse une Note *Sur les fonctions algébriques à trois déterminations.*

M. Demoulin adresse une Note *Sur la détermination des couples de surfaces applicables, telles que la distance de deux points correspondants soit constante.*

M. LAISANT fait la Communication suivante :

Remarque sur une équation différentielle linéaire.

On a une intégrale particulière de l'équation

$$x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + 10 y = 0,$$

en remarquant que le produit $i(i-1)(i-2)(i-3)$ est égal à -10 , de telle sorte que si l'on pose $y = cx^i$, il vient

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -10 c x^{i-4} = -\frac{10}{x^4} y,$$

c'est-à-dire que l'équation différentielle est vérifiée.

Il en sera évidemment de même si, au lieu de i , on écrit pour l'exposant de x l'une quelconque des racines de l'équation

$$z(z-1)(z-2)(z-3) + 10 = 0.$$

Or, ces racines sont i , $-i$, $3+i$, $3-i$.

On a donc pour l'intégrale générale

$$y = c x^i + c_1 x^{-i} + c_2 x^{3+i} + c_3 x^{3-i}.$$

En posant $c + c_1 = k$, $c - c_1 = k_1$, $c_2 + c_3 = k_2$, $c_2 - c_3 = k_3$, on peut encore avoir l'intégrale sous la forme suivante

$$y = k \cos \log x + k_1 i \sin \log x + x^3 [k_2 \cos \log x + k_3 i \sin \log x] \\ = (k + k_2 x^3) \cos \log x + (k_1 + k_3 x^3) i \sin \log x.$$

Les constantes pouvant aussi bien prendre des valeurs imaginaires que réelles, l'intégrale peut enfin s'écrire :

$$y = A \sin \log ax + B x^3 \sin \log bx.$$

A, a, B, b étant les quatre constantes arbitraires.

M. RAFFY fait la Communication suivante :

Sur certaines équations différentielles linéaires.

Je ne sais si la proposition suivante n'a pas été déjà remarquée :

Pour intégrer l'équation linéaire d'ordre n , qui admet comme solutions particulières x , x^2 , ..., x^n , il suffit d'y remplacer les dérivées par des constantes arbitraires.

Formons en effet l'équation d'ordre n que vérifie le polynôme

$$(1) \quad y = C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n.$$

Différentiant n fois successivement et éliminant les constantes C, on devra évaluer à zéro un déterminant dont une colonne contient y et ses dérivées y' , y'' , ..., $y^{(n)}$; tous les autres éléments sont des puissances de x , des constantes ou des zéros. L'équation, développée, est donc de la forme

$$(2) \quad p_n y^{(n)} - p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} p_1 y' + (-1)^n p_0 y = 0,$$

tous les coefficients p étant des polynômes entiers en x . Pour les déterminer, remarquons que cette équation doit entraîner $y^{(n+1)} = 0$. Or, en la différenciant, on trouve

$$p_n y^{(n+1)} + (p'_n - p_{n-1}) y^{(n)} - (p'_{n-1} - p''_{n-2}) y^{(n-1)} + \dots \\ + (-1)^{n-1} (p'_1 - p_0) y' + (-1)^n p'_0 y = 0,$$

ce qui montre que p_0 se réduit à une constante et que tous les

binômes entre parenthèses sont nuls :

$$p'_1 - p_0 = p'_2 - p_1 = \dots = p'_n - p_{n-1} = 0.$$

Il suit de là que chaque polynôme p_r sera du degré r et contiendra le terme $p_0 x^r : r!$ Il n'en aura d'ailleurs pas d'autre, l'équation (2) devant être vérifiée quand on y remplace x par kx , quelle que soit la constante k . En conséquence cette équation peut s'écrire

$$(2) \quad y = y'x - \frac{y''}{2!}x^2 + \frac{y'''}{3!}x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{y^{(n)}}{n!}x^n.$$

Il suffit de la comparer à son intégrale générale (1) pour arriver à la conclusion annoncée.

On voit, par cet exemple, qu'il existe dans tous les ordres des équations différentielles dont on obtient l'intégrale générale en y remplaçant les dérivées par des constantes arbitraires. Il serait curieux, mais sans doute difficile, de former toutes ces équations.

SÉANCE DU 20 MARS 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Hott, présenté par MM. Désiré André et Raffy; M. Dermenghem, présenté par MM. Appell et Goursat.

Communications :

M. Désiré André : *Sur les permutations quasi alternées.*

M. d'Ocagne : *Sur l'influence des erreurs de même sens.*

M. Laisant : *Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure.*

M. Humbert : *Génération géométrique des asymptotiques de la surface de Kummer.*

M. Goursat : *Sur des équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA COMPOSITION DES LOIS DE PROBABILITÉ DES ERREURS DE SITUATION D'UN POINT SUR UN PLAN;

Par M. M. D'OCAGNE.

Le but de la présente Note est de faire connaître la démonstration de résultats qui ont été présentés à l'Académie des Sciences dans la séance du 5 mars 1894 (*Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 517).

1. — LEMME ANALYTIQUE.

Posant

$$\varphi(u_1, u_2) = a_1 u_1^2 + 2b u_1 u_2 + a_2 u_2^2 + 2c_1 u_1 + 2c_2 u_2 + d,$$

considérons la somme de tous les éléments infiniment petits de la forme

$$e^{-\varphi(u_1, u_2)} du_1 du_2$$

tels que $u_1 + u_2$ soit compris entre t et $t + dt$. Cette somme pourra s'écrire

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t-u_1}^{t+dt-u_1} e^{-\varphi(u_1, u_2)} du_1 du_2.$$

Cette intégrale a pour *valeur principale*

$$I = dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u_1, t-u_1)} du_1.$$

On a d'ailleurs

$$\varphi(u_1, t-u_1) = l u_1^2 + 2m u_1 + n, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} l = a_1 - 2b + a_2, \\ m = (b - a_2)t + (c_1 - c_2), \\ n = a_2 t^2 + 2c_2 t + d. \end{cases}$$

Décomposant cette forme quadratique en une somme de carrés, on a

$$\varphi(u_1, t-u_1) = \left(\sqrt{l} u_1 + \frac{m}{\sqrt{l}} \right)^2 + \frac{n l - m^2}{l}.$$

L'intégrale précédente devient donc, en posant $\sqrt{l} u_1 + \frac{m}{\sqrt{l}} = v$,

$$\begin{aligned} I &= dt \cdot e^{-\frac{n l - m^2}{l}} \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv, \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{l}} e^{-\frac{n l - m^2}{l}} dt, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant l, m, n par leurs valeurs ci-dessus et réduisant,

$$(1) I = \sqrt{\frac{\pi}{a_1 - 2b + a_2}} e^{-\frac{(a_1 a_2 - b^2)t^2 + 2[a_1 c_2 + a_2 c_1 - b(c_1 + c_2)]t + d(a_1 - 2b + a_2) - (c_1 - c_2)^2}{a_1 - 2b + a_2}} dt,$$

2. — ERREURS A UN PARAMÈTRE.

Avant d'aborder le problème principal que nous avons en vue, traitons le cas particulier des erreurs à un paramètre.

n causes d'erreurs agissant isolément donnent naissance aux lois de probabilité exprimées (pour $i = 1, 2, \dots, n$) par

$$p_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\pi}} e^{-\alpha_i x_i^2} dx_i.$$

Déterminer la loi de probabilité des erreurs lorsque ces n causes agissent simultanément, mais indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire lorsque leurs effets s'ajoutent.

Prenons d'abord $n = 2$.

La probabilité, pour que l'on ait un écart compris entre x et $x + dx$, est donnée par

$$p = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x+dx-x_1} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2)} dx_1 dx_2,$$

ou, d'après la formule (1), dans laquelle on fait $u_1 = x_1, u_2 = x_2, t = x, a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2, b = c_1 = c_2 = d = 0$,

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x^2} dx,$$

qui, lorsqu'on pose

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

est bien de la forme

$$(2) \quad p = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx.$$

La relation précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}.$$

On en déduit immédiatement que, dans le cas général, on aura encore une loi de la forme (2), z étant donné par

$$(3) \quad \frac{1}{z} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{z_i}.$$

Puisque l'on a, d'une manière générale, en représentant par r_i l'erreur probable correspondant à la probabilité p_i ,

$$r_i \sqrt{z_i} = 0,4769 \dots,$$

la formule (3) peut s'écrire

$$r_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} r_i^2 z_i.$$

Ainsi se trouve démontré rigoureusement, lorsque l'on admet la loi de Gauss, le théorème bien connu : *Lorsque diverses causes d'erreurs s'ajoutent, le carré de l'erreur probable résultante est égale à la somme des carrés des erreurs probables composantes.*

3. — ERREURS A DEUX PARAMÈTRES.

n causes d'erreurs agissant isolément sur la position d'un point sur un plan donnent naissance aux lois de probabilité exprimées (pour $i = 1, 2, \dots, n$) par

$$p_i = \frac{\sqrt{\delta_i}}{\pi} e^{-(\alpha_i x_i^2 + 2\beta_i x_i y_i + \gamma_i y_i^2)} dx_i dy_i \quad (\text{où } \delta_i = \alpha_i \gamma_i - \beta_i^2),$$

déterminer la loi de probabilité des erreurs lorsque ces n causes agissent simultanément, mais indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire lorsque leurs effets s'ajoutent.

Supposons d'abord $n = 2$.

La probabilité pour que les écarts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) se produisent simultanément est le produit $p_1 p_2$ et l'écart résul-

tant (x, y) est alors tel que $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Donc la probabilité totale pour que cet écart se produise est donnée par

$$(4) \quad p = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2}}{\pi^2} \Pi,$$

avec

$$(5) \quad \Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x+d \cdot x-x_1} \int_{y-y_1}^{y+dy-y_1} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + 2\beta_2 x_2 y_2 + \gamma_2 y_2^2)} dx_1 dy_1 dx_2$$

Posons

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-x_1}^{x+d \cdot x-x_1} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + 2\beta_2 x_2 y_2 + \gamma_2 y_2^2)} dx_1 dx_2.$$

Cette intégrale est de la forme de celle qui a été calculée dans le lemme, lorsqu'on fait dans celle-ci

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \quad t = x, \\ a_1 = \alpha_1, \quad b = 0, \quad a_2 = \alpha_2, \quad c_1 = \beta_1 \gamma_1, \quad c_2 = \beta_2 \gamma_2, \quad d = \gamma_1 \gamma_1^2 + \gamma_2 \gamma_2^2.$$

Par suite, la formule (1) donne ici

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}} e^{-\frac{\alpha_1 \alpha_2 x^2 + 2[\alpha_1 \beta_2 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_1] x + (\gamma_1 \gamma_1^2 + \gamma_2 \gamma_2^2)(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 \gamma_1 - \beta_2 \gamma_2)^2}{\alpha_1 + \alpha_2}} dx.$$

On a maintenant

$$(6) \quad \Pi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_1 + \alpha_2}} J dx,$$

avec

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{y-y_1}^{y+dy-y_1} e^{-(\gamma_1(\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1^2) y_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 y_1 y_2 + (\gamma_2(\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_2^2) y_2^2 + 2\alpha_2 \beta_1 x y_1 + 2\alpha_1 \beta_2 x y_2 + \alpha_1 \alpha_2 x^2} dy_1 dy_2$$

intégrale encore calculable par la formule (1) où l'on fait

$$u_1 = y_1, \quad u_2 = y_2, \quad t = y, \\ a_1 = \frac{\gamma_1(\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1^2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad b = \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad a_2 = \frac{\gamma_2(\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \\ c_1 = \frac{\alpha_2 \beta_1 x}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad c_2 = \frac{\alpha_1 \beta_2 x}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad d = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} x^2.$$

On obtient ainsi, après réduction,

$$J = \sqrt{\frac{\pi(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2}} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)} dy,$$

avec

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\gamma_1 + \gamma_2) - (\alpha_1 \beta_2^2 + \alpha_2 \beta_1^2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2}, \\ \beta = \frac{\beta_2 \alpha_1 \gamma_1 + \beta_1 \alpha_2 \gamma_2 - \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2}, \\ \gamma = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\alpha_1 + \alpha_2) - (\gamma_1 \beta_2^2 + \gamma_2 \beta_1^2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2}. \end{cases}$$

Portant cette valeur de J dans (6) et la valeur de H ainsi obtenue dans (4), on a

$$(8) \quad p = \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2}} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)} dx dy.$$

Formons l'expression $\delta = \alpha\gamma - \beta^2$.

Pour cela, remarquons que, si nous posons

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2 = D,$$

les formules (7) peuvent s'écrire

$$(9) \quad \alpha = \frac{\delta_2 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_2}{D}, \quad \beta = \frac{\delta_2 \beta_1 + \delta_1 \beta_2}{D}, \quad \gamma = \frac{\delta_2 \gamma_1 + \delta_1 \gamma_2}{D}.$$

Dès lors

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(\delta_2 \alpha_1 + \delta_1 \alpha_2)(\delta_2 \gamma_1 + \delta_1 \gamma_2) - (\delta_2 \beta_1 + \delta_1 \beta_2)^2}{D^2} \\ &= \frac{\delta_1 \delta_2 (\delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1 - 2\beta_1 \beta_2)}{D^2}. \end{aligned}$$

Mais on vérifie immédiatement que

$$\delta_1 + \delta_2 + \alpha_1 \gamma_2 + \alpha_2 \gamma_1 - 2\beta_1 \beta_2 = D.$$

Il vient donc

$$(10) \quad \delta = \frac{\delta_1 \delta_2}{D},$$

et la formule (8) devient

$$(11) \quad p = \frac{\sqrt{\delta}}{\pi} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)} dx dy.$$

On retrouve donc bien une loi résultante de même forme que les deux lois composantes, les paramètres α , β , γ étant d'ailleurs définis par les formules (9).

Pour étendre ce résultat au cas de n causes d'erreurs, transformons ces formules en y remplaçant D par sa valeur tirée de (10). Nous voyons alors qu'elles peuvent s'écrire

$$(12) \quad \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha_1}{\delta_1} + \frac{\alpha_2}{\delta_2}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{\beta_1}{\delta_1} + \frac{\beta_2}{\delta_2}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma_1}{\delta_1} + \frac{\gamma_2}{\delta_2}.$$

Dès lors, effectuant de proche en proche la composition des n lois d'erreurs, on voit que l'on obtiendra encore la loi représentée par la formule (11), les paramètres α , β , γ étant déterminés par les formules

$$(13) \quad \frac{\alpha}{\delta} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\alpha_i}{\delta_i}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\beta_i}{\delta_i}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\gamma_i}{\delta_i}.$$

Pour tirer de là α , β et γ , posons

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\alpha_i}{\delta_i} = A, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\beta_i}{\delta_i} = B, \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\gamma_i}{\delta_i} = C.$$

Nous avons alors

$$\alpha = \delta A, \quad \beta = \delta B, \quad \gamma = \delta C,$$

d'où l'on déduit, en posant $AC - B^2 = \Delta$,

$$\delta = \delta^2 \Delta$$

ou

$$1 = \delta \Delta.$$

Les formules précédentes deviennent alors

$$(14) \quad \alpha = \frac{A}{\Delta}, \quad \beta = \frac{B}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{C}{\Delta}.$$

Ce sont ces dernières qui permettront de calculer α , β , γ en fonction des α_i , β_i , γ_i .

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES COUPLES DE SURFACES APPLICABLES
TELLES QUE LA DISTANCE
DE DEUX POINTS CORRESPONDANTS SOIT CONSTANTE;

Par M. A. DEMOULIN.

1. Le problème de la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants soit constante a été résolu par Ribaucour ⁽¹⁾ dans le cas où les droites de jonction des points correspondants peuvent prendre toutes les directions de l'espace. Plus récemment, M. Caronnet ⁽²⁾ a complété la solution de ce problème en envisageant le cas où les droites de jonction des points correspondants ont une infinité simple de directions. Enfin M. Antomari ⁽³⁾ a donné une élégante génération des surfaces que l'on obtient dans ce second cas, en appliquant les méthodes qui lui ont servi dans l'étude de la déformation des surfaces réglées. Pour être complet, je rappellerai que M. Genty ⁽⁴⁾ a consacré au sujet qui nous occupe une Note dans laquelle il fait usage de la méthode des quaternions.

Je me propose de faire voir que le problème résolu par Ribaucour est susceptible d'une solution géométrique des plus simples. Je montrerai ensuite que l'application de la méthode cinématique de M. Darboux conduit à un résultat équivalent à celui de M. Antomari, et qui a même sur ce dernier l'avantage de pouvoir revêtir une forme entièrement géométrique.

2. J'établirai d'abord le lemme suivant :

Si l'on porte, à partir du point central O, relatif à une génératrice G d'une surface réglée (Σ), deux segments constants et égaux OM_1 et OM_2 , les points M_1 et M_2 décriront des arcs de même longueur, et réciproquement.

Soit

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + [(u - \alpha)^2 + \beta^2] dv^2$$

⁽¹⁾ *Mémoire sur les elassoïdes*, p. 60.

⁽²⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXI, p. 134.

⁽³⁾ *Même Recueil*, t. XXII, p. 58.

⁽⁴⁾ *Ibid.*, p. 36.

l'élément linéaire de la surface (Σ) . Les équations des courbes (C_1) et (C_2) , décrites par les points M_1 et M_2 , sont respectivement

$$x - u = a, \quad x - u = -a,$$

en posant $OM_1 = OM_2 = a$.

Si l'on appelle s_1 et s_2 les arcs de ces courbes, on aura, d'après (1),

$$ds_1^2 = ds_2^2,$$

ce qui démontre la première partie du lemme.

Réciproquement, supposons constante et égale à $2a$ la distance des points M_1 et M_2 . Soient (u, v) les coordonnées du point M_1 et $(u + 2a, v)$ celles du point M_2 ; on a, par hypothèse,

$$du^2 + [(u - x)^2 + \beta^2] dv^2 = du^2 + [(u + 2a - x)^2 + \beta^2] dv^2.$$

Cette égalité entraîne la condition $u = x - a$. Les u des points M_1 et M_2 sont donc $x - a$ et $x + a$, et dès lors le milieu du segment M_1M_2 coïncide avec le point O .

3. Cela posé, soient (M_1) et (M_2) deux surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants M_1 et M_2 soit constante. Si le point M_1 décrit, sur la surface (M_1) , une courbe (C_1) , le point M_2 décrira, sur la surface (M_2) , une courbe correspondante (C_2) , et la droite M_1M_2 ou G engendrera une surface réglée (Σ) . Puisque les arcs décrits par les points M_1 et M_2 sont égaux et que la distance de ces points est constante, il résulte du lemme ci-dessus que le point central O de la génératrice G est situé au milieu du segment M_1M_2 . Par conséquent, la congruence des droites de jonction des points correspondants jouit de la propriété suivante :

Les lignes de striction de toutes les surfaces de cette congruence sont situées sur une surface.

Désignons par (G) l'une quelconque des congruences possédant cette propriété et par (S) la surface correspondante. Il suit du lemme précité que toute congruence (G) satisfait à la question; en d'autres termes, si l'on porte sur chacune des droites de cette congruence, de part et d'autre du point O , où elle rencontre la surface (S) , deux segments constants et égaux OM_1 et OM_2 , les points

M_1 et M_2 engendreront deux surfaces applicables sur lesquelles ces points se correspondront.

4. Tout revient donc à déterminer la congruence (G) la plus générale. Supposons d'abord que les droites qui la composent puissent avoir toutes les directions de l'espace; dans ce cas, la solution est immédiate. Il résulte, en effet, de la propriété caractéristique de la congruence (G) que le cercle, lieu des points représentatifs des surfaces de la congruence qui passent par une droite de cette congruence, se réduit à un point; on conclut de là que la congruence (G) est isotrope et que le milieu du segment focal appartient à la surface (S).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, dû à Ribaucour :

Pour obtenir le couple le plus général de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants M_1 et M_2 soit constante, et qu'en outre les droites M_1M_2 puissent avoir toutes les directions de l'espace, il suffit de porter sur chacune des droites de la congruence isotrope la plus générale, à partir du milieu O du segment focal, deux segments égaux et constants OM_1 et OM_2 .

5. Passons à l'étude de la congruence (G) la plus générale, dans l'hypothèse où les droites qui lui appartiennent n'ont qu'une infinité simple de directions, et, à cet effet, considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$ se déplaçant de manière que l'axe Oz soit successivement parallèle aux différentes droites de la congruence. Les composantes ξ , η , ζ de la vitesse du point O et les composantes p , q , r de la rotation instantanée du trièdre seront des fonctions d'un paramètre t .

Le trièdre $Oxyz$ étant pris dans une de ses positions, les droites de la congruence parallèles à Oz forment un cylindre dont nous désignerons par (C) l'intersection avec le plan xOy . Soient (x, y) les coordonnées du pied d'une des génératrices G de ce cylindre; on obtiendra l'une quelconque (Σ) des surfaces de la congruence passant par G en prenant pour x une fonction arbitraire de t ; l'équation de la courbe (G) donnera la valeur correspondante de y . Cherchons le plan tangent à (Σ) en un point quelconque (x, y, z) de G. Le déplacement infiniment petit de ce point a pour compo-

santes, suivant Ox et Oy ,

$$\begin{aligned} (\xi + qz - ry) dt + dx, \\ (\eta + rx - pz) dt + dy. \end{aligned}$$

Soit θ l'angle que le plan tangent cherché fait avec le plan xOz , on a

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\eta + rx - pz + \frac{dy}{dt}}{\xi + qz - ry + \frac{dx}{dt}}.$$

Le coefficient angulaire du plan asymptote relatif à G est donc $-\frac{p}{q}$; par suite, $\frac{q}{p}$ est celui du plan central relatif à la même droite. Le z du point central correspondant est donné par l'équation

$$\frac{\eta + rx - pz + \frac{dy}{dt}}{\xi + qz - ry + \frac{dx}{dt}} = \frac{q}{p},$$

qui peut s'écrire

$$(2) \quad z(p^2 + q^2) = p(\eta + rx) - q(\xi - ry) + p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt}.$$

Pour que z soit indépendant de la surface de la congruence que l'on considère, il faut que l'on ait

$$(3) \quad p dy - q dx = 0,$$

et comme cette équation doit avoir lieu en tous les points de la ligne (C), on en conclut

$$py - qx = f(t).$$

Celles des droites de la congruence qui ont même direction sont donc situées dans un plan. Nous prendrons désormais ce plan comme plan des xz , ce qui entraîne la condition $q = 0$.

En résumé, si un trièdre $Oxyz$ se déplace de manière que la composante q de sa rotation soit nulle, les droites du plan xOz , parallèles à Oz , engendreront la congruence cherchée. Or l'axe hélicoïdal relatif au déplacement infiniment petit de ce trièdre est parallèle au plan des xz et se projette, sur ce plan, suivant la caractéristique Δ de ce plan. De là résulte la génération suivante de la congruence (G) :

Soit P un plan sur lequel est tracée une droite D ; si l'on fait rouler le plan P sur une développable arbitrairement choisie, les droites du plan P , parallèles à D , engendreront la congruence cherchée.

Cherchons maintenant la surface (S) , lieu des lignes de striction des surfaces de la congruence. Or, si l'on fait, dans (2), $q = 0$ et que l'on tienne compte de la relation (3), on trouve l'équation

$$\tau_1 + rx - pz = 0,$$

qui représente la caractéristique Δ du plan P . La surface (S) est donc la développable, enveloppe de ce plan. Ce résultat, joint aux considérations du n° 3, nous conduit à la génération suivante des surfaces (M_1) et (M_2) :

Si l'on mène, dans le plan P , parallèlement à la caractéristique Δ de ce plan et symétriquement par rapport à cette droite, deux droites Δ_1 et Δ_2 découpant sur D un segment constant, ces droites, lors du mouvement du plan P défini ci-dessus, engendreront les surfaces (M_1) et (M_2) applicables les plus générales telles que la distance de deux points correspondants soit constante, les droites de jonction des points correspondants n'ayant qu'une infinité simple de directions.

6. Nous terminerons en cherchant les développables de la congruence. Une droite quelconque de la congruence est définie par une valeur du paramètre t qui fixe la position du trièdre $Oxyz$ et par sa distance x à l'axe des z de ce trièdre. Un point $(x, 0, z)$ de cette droite décrira une courbe qui lui sera tangente si l'on a simultanément

$$dx + \xi dt = 0, \quad \tau_1 + rx - pz = 0.$$

La seconde de ces équations montre que le foyer situé à distance finie appartient à la caractéristique du plan xOz , ce que l'on savait déjà; quant à la première, elle donne

$$x = - \int \xi dt + \text{const.},$$

ce qui est l'équation finie des développables de la congruence.

SUR LES FONCTIONS ALGÈBRIQUES A TROIS DÉTERMINATIONS;

Par M. G. FLOQUET.

Soit

$$Au^3 + Bu^2 + Cu + D = 0$$

l'équation algébrique du troisième degré en u , où A, B, C, D désignent des polynômes quelconques entiers en z , et qui définit u comme fonction algébrique de z . Dans bon nombre de questions se rattachant à cette équation, on a besoin de connaître, d'une manière générale, indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux coefficients, la forme analytique des racines dans le domaine d'un point singulier. C'est ce qui a lieu, par exemple, si l'on veut étudier une intégrale abélienne appartenant à une équation *quelconque* du troisième degré. Je me propose ici d'obtenir, en la précisant autant que possible, la forme analytique en question.

Le changement de u en $u - \frac{B}{3A}$ ramenant toujours l'équation proposée à une équation de même forme entière

$$(1) \quad ru^3 + pu + q = 0,$$

mais privée du terme u^2 , j'envisagerai seulement cette dernière. Je supposerai son premier membre *indécomposable*, de sorte qu'entre ses racines, il ne pourra exister aucune relation linéaire, homogène, à coefficients constants *inégaux*. J'emploierai, pour chaque cas, des méthodes spéciales, afin d'obtenir un résultat aussi précis, aussi détaillé que possible.

1. Regardant en premier lieu r comme égal à l'unité, je considère l'équation

$$(2) \quad u^3 + p(z)u + q(z) = 0.$$

Les seuls points singuliers à distance finie sont les zéros du discriminant

$$\Delta(z) = 4p^3(z) + 27q^2(z),$$

en chacun desquels l'équation (2) a deux racines égales et différentes de zéro, ou trois racines nulles. Soit α un de ces points,

et soient u_1, u_2, u_3 les branches de la fonction u envisagées dans son domaine. Je vais étudier et exprimer ces fonctions, en utilisant ce fait que leur somme est identiquement nulle.

2. Supposons d'abord que a , étant racine multiple d'ordre k de Δ , n'annule pas q , auquel cas a n'annule pas p non plus :

$$\Delta(z) = (z - a)^k \Delta_1(z), \quad \Delta_1(a) \neq 0, \quad p(a) \neq 0, \quad q(a) \neq 0.$$

Pour $z = a$, l'équation (2) aura une racine double et une racine simple différentes de zéro. Soit u_3 celle des branches u_1, u_2, u_3 qui, au point a , coïncide avec la racine simple : on peut alors poser

$$u_3 = -2\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ désignant une fonction holomorphe dans le domaine du point a et non nulle en ce point. On en conclut

$$(3) \quad u_1 + u_2 = 2\varphi(z).$$

D'autre part, les trois fonctions $(u_2 - u_3)^2, (u_3 - u_1)^2, (u_1 - u_2)^2$ satisfont à l'équation aux carrés des différences des racines

$$U^3 + 6pU^2 + 9p^2U + \Delta = 0;$$

or, la dernière seule est nulle pour $z = a$; elle est donc de la forme $(z - a)^{\rho}\varpi(z)$, $\varpi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a et $\varpi(a)$ différent de zéro.

Comme le produit de ces trois fonctions est égal à $-\Delta$, on a

$$(u_2 - u_3)^2(u_3 - u_1)^2 = -(z - a)^{k-\rho} \frac{\Delta_1(z)}{\varpi(z)},$$

ce qui exige $\rho = k$, puisque le premier membre est fini et non nul pour $z = a$. On a, par suite,

$$(u_1 - u_2)^2 = (z - a)^k \varpi(z);$$

d'où l'on conclut, puisque $\varpi(a)$ n'est pas nul,

$$u_1 - u_2 = 2(z - a)^{\frac{k}{2}} \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a et $\psi(a)$ diffé-

rant de zéro. En combinant cette relation avec la relation (3), on obtient finalement

$$(4) \quad \begin{cases} u_1 = \varphi(z) + (z - a)^{\frac{k}{2}} \psi(z), \\ u_2 = \varphi(z) - (z - a)^{\frac{k}{2}} \psi(z), \\ u_3 = -2\varphi(z), \end{cases}$$

comme expressions des branches u_1, u_2, u_3 dans le domaine du point a , $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant deux fonctions régulières et non nulles en ce point.

3. Supposons maintenant que $z = a$ annule q , auquel cas il annule aussi p ; soient β le degré de multiplicité de a relativement à p , et γ le degré relatif à q :

$$p(z) = (z - a)^\beta p_1(z), \quad q(z) = (z - a)^\gamma q_1(z), \quad p_1(a) \neq 0, \quad q_1(a) \neq 0.$$

A cause de

$$\Delta = 4(z - a)^{3\beta} p_1^3 + 27(z - a)^{2\gamma} q_1^2,$$

on voit que, si k désigne toujours le degré de multiplicité de la racine a de Δ , k sera égal à 2γ ou à 3β , selon que 2γ sera inférieur ou supérieur à 3β , et que k sera au moins égal à la valeur commune de 2γ et de 3β lorsque ces deux nombres seront égaux. Je vais examiner successivement ces trois cas.

Premier cas. — $3\beta > 2\gamma, k = 2\gamma$.

La formule de Cardan conduit immédiatement aux expressions cherchées de u_1, u_2, u_3 . La résolvante de l'équation (2) étant, en effet,

$$U^2 + qU - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

si je pose

$$U = (z - a)^\gamma V,$$

elle devient

$$V^2 + q_1 V - \left(\frac{p_1}{3}\right)^3 (z - a)^{3\beta - 2\gamma} = 0,$$

équation qui, pour $z = a$, admet deux racines distinctes, dont une seule est nulle. D'où je conclus que les deux racines de la résolvante sont holomorphes dans le domaine du point a , et que l'une

d'elles admet ce point comme zéro d'ordre γ . Représentons-la par $(z - a)^\gamma \varpi(z)$, $\varpi(a)$ n'étant pas nul; puis désignons par $(z - a)^{\frac{\gamma}{3}} \varphi(z)$, avec $\varphi(a) \neq 0$, une quelconque des trois déterminations de $\sqrt[3]{(z - a)^\gamma \varpi(z)}$.

Si l'on pose alors

$$-\frac{1}{3} \frac{p_1(z)}{\varphi(z)} = \psi(z),$$

la formule connue donne les expressions suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} u_1 = (z - a)^{\frac{\gamma}{3}} \left[\varphi(z) + (z - a)^{\beta - \frac{2\gamma}{3}} \psi(z) \right], \\ u_2 = (z - a)^{\frac{\gamma}{3}} \left[j \varphi(z) + j^2 (z - a)^{\beta - \frac{2\gamma}{3}} \psi(z) \right], \\ u_3 = (z - a)^{\frac{\gamma}{3}} \left[j^2 \varphi(z) + j (z - a)^{\beta - \frac{2\gamma}{3}} \psi(z) \right], \end{cases}$$

où j et j^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité, et où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignent des fonctions régulières et non nulles au point a .

Deuxième cas. — $3\beta < 2\gamma$, $k = 3\beta$.

Je poserai ici

$$(z - a)^{\frac{1}{2}} = z', \quad u = v z'^\beta,$$

$(z - a)^{\frac{1}{2}}$ désignant une quelconque des deux déterminations de $\sqrt{z - a}$. L'équation (2) devient

$$(6) \quad v^3 + v p_1(a + z'^2) + z'^{2\gamma - 3\beta} q_1(a + z'^2) = 0.$$

Pour $z' = 0$, elle admet trois racines simples, dont une nulle. Si donc v_1, v_2, v_3 désignent les branches de v envisagées dans le domaine du point $z' = 0$, v_1, v_2, v_3 sont holomorphes, et une seule de ces fonctions, qui sera v_3 par exemple, est nulle pour $z' = 0$. L'identité

$$(7) \quad v_1 v_2 v_3 = - z'^{2\gamma - 3\beta} q_1(a + z'^2)$$

montre alors que l'ordre infinitésimal de v_3 est $2\gamma - 3\beta$, en sorte que l'on peut écrire

$$v_3 = - z'^{2\gamma - 3\beta} \varpi(z') \quad \varpi(0) \neq 0.$$

Comme, d'autre part, la somme $v_1 + v_2 + v_3$ est nulle, on peut

poser

$$v_1 = z'^{2\gamma-3\beta} \varpi(z') + \chi(z'),$$

$$v_2 = z'^{2\gamma-3\beta} \varpi(z') - \chi(z'),$$

$\chi(z')$ étant holomorphe dans le domaine de $z' = 0$ et différent de zéro en ce point.

Mais il est aisé de voir que $\varpi(z')$ et $\chi(z')$ ne dépendent que du carré de z' . Lorsqu'on passe, en effet, du point z' au point $(-z')$ en restant à distance infiniment petite de $z' = 0$, v_3 ne cesse pas de coïncider avec l'unique racine de l'équation (5) qui est voisine de zéro. Or, au point $(-z')$, cette équation devient soit l'équation (5) elle-même, soit sa transformée en $(-v)$, selon que $2\gamma - 3\beta$ est pair ou impair, de sorte que la racine voisine de zéro y est en tout cas $-2(-1)^{2\gamma-3\beta} z'^{2\gamma-3\beta} \varpi(z')$; quant à v_3 , il devient $-2(-z')^{2\gamma-3\beta} \varpi(-z')$. On a donc, en égalant ces deux expressions,

$$\varpi(-z') = \varpi(z'),$$

ce qui prouve que $\varpi(z')$ est une fonction paire $\varphi_1(z'^2)$ de z' . L'identité (7) s'écrit alors

$$2v_1v_2\varphi_1(z'^2) = q_1(a + z'^2),$$

et montre, par suite, que v_1v_2 ou $z'^{4\gamma-6\beta}\varphi_1(z'^2) - \chi^2(z')$ est aussi une fonction paire, ce qui exige que $\chi(z')$ soit paire ou impaire : comme $\chi(0)$ n'est pas nul, il faut donc que $\chi(z')$ soit une fonction paire $\psi_1(z'^2)$.

On a, par conséquent,

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= z'^{2\gamma-3\beta} \varphi_1(z'^2) + \psi_1(z'^2), \\ v_2 &= z'^{2\gamma-3\beta} \varphi_1(z'^2) - \psi_1(z'^2), \\ v_3 &= -2z'^{2\gamma-3\beta} \varphi_1(z'^2), \end{aligned} \right\} \begin{cases} \varphi_1(0) \neq 0, \\ \psi_1(0) \neq 0, \end{cases}$$

et si l'on revient maintenant aux quantités u et z , et que l'on pose

$$\varphi_1(z-a) = \varphi(z), \quad \psi_1(z-a) = \psi(z),$$

on obtient

$$(8) \quad \begin{cases} u_1 = (z-a)^{\frac{\beta}{2}} \left[+ \psi(z) + (z-a)^{\gamma-\frac{3\beta}{2}} \varphi(z) \right], \\ u_2 = (z-a)^{\frac{\beta}{2}} \left[- \psi(z) + (z-a)^{\gamma-\frac{3\beta}{2}} \varphi(z) \right], \\ u_3 = -2(z-a)^{\gamma-\beta} \varphi(z), \end{cases}$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant deux fonctions régulières au point a , et non nulles en ce point.

Troisième cas. — $3\beta = 2\gamma$.

Cette égalité exige que l'on ait

$$\beta = 2m, \quad \gamma = 3m,$$

m désignant un entier. On a donc

$$\Delta = (z - a)^{6m} (4p_1^3 + 27q_1^2) = (z - a)^{6m} \Delta_1,$$

de sorte que, si $\Delta_1(a)$ n'est pas nul, a est racine multiple d'ordre $k = 6m$ de Δ , tandis que, si a annule Δ_1 n fois, a est racine d'ordre $k = 6m + n$ de Δ . Posons

$$u = (z - a)^m v,$$

et l'équation (2) devient

$$(9) \quad v^3 + p_1 v + q_1 = 0,$$

qui n'a aucune racine nulle pour $z = a$.

Supposant d'abord $\Delta_1(a)$ différent de zéro, auquel cas k est égal à $6m$, l'équation (9) aura trois racines simples au point a . Les branches v_1, v_2, v_3 de v sont holomorphes dans son domaine et non nulles en ce point. Soit

$$v_3 = -2\varphi(z);$$

comme $v_1 + v_2 + v_3$ est nul, il vient

$$v_1 + v_2 = 2\varphi(z),$$

et je puis poser

$$v_1 = \varphi(z) + \psi(z),$$

$$v_2 = \varphi(z) - \psi(z),$$

d'où l'on déduit

$$(10) \quad \begin{cases} u_1 = (z - a)^m [\varphi(z) + \psi(z)], \\ u_2 = (z - a)^m [\varphi(z) - \psi(z)], \\ u_3 = -2(z - a)^m \varphi(z), \end{cases}$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant des fonctions régulières au point a , non nulles en ce point, et en outre telles que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ ne soient ni égaux, ni égaux et de signes contraires.

Supposons maintenant que a soit racine multiple d'ordre n de Δ_1 , auquel cas k est égal à $6m + n$. L'équation (9) se trouve

alors dans les mêmes conditions que celles admises au début (2) pour l'équation (2), ce qui permet d'écrire

$$v_1 = \varphi(z) + (z - a)^{\frac{n}{2}} \psi(z),$$

$$v_2 = \varphi(z) - (z - a)^{\frac{n}{2}} \psi(z),$$

$$v_3 = -2\varphi(z)$$

et, par suite,

$$(11) \quad \begin{cases} u_1 = (z - a)^m \left[\varphi(z) + (z - a)^{\frac{n}{2}} \psi(z) \right], \\ u_2 = (z - a)^m \left[\varphi(z) - (z - a)^{\frac{n}{2}} \psi(z) \right], \\ u_3 = -2(z - a)^m \varphi(z), \end{cases}$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions régulières et non nulles au point a .

Remarquons que les expressions (10), qui répondent au cas $n = 0$, sont comprises dans les formules (11).

4. En résumé, si j'observe que pour $m = 0$, c'est-à-dire pour $3\beta = 2\gamma = 0$, ce qui est le cas examiné au début (n° 2), les formules (11) coïncident avec les formules (4) obtenues dans ce cas, on peut dire que les expressions de u_1 , u_2 , u_3 sont les expressions (5) si $3\beta > 2\gamma$, les expressions (8) si $3\beta < 2\gamma$, les expressions (11) si $3\beta = 3\gamma$.

Dans ce dernier cas, $6m$, qui peut être nul, est la valeur commune des nombres 3β et 2γ , et n représente la différence $k - 6m$, positive ou nulle, entre le degré de multiplicité k de la racine a de Δ et le nombre $6m$.

5. J'ai supposé que le coefficient r de l'équation

$$(1) \quad ru^3 + pu + q = 0$$

était égal à l'unité. Examinons ce qui a lieu lorsqu'il dépend de z .

Les points singuliers à distance finie sont alors les zéros de $r^3(4p^3 + 27r^2q^2)$. Pour ceux de ces zéros qui annulent r , l'équation (1) aura au moins deux racines infinies; en chacun des autres, elle aura deux racines égales et différentes de zéro ou trois racines nulles.

Soit a un quelconque de ces points singuliers. Désignons toujours par u_1 , u_2 , u_3 les branches de u considérées dans son do-

maine. Appelons λ, μ, ν les nombres de fois que a annule respectivement r, p, q , un au moins de ces trois nombres étant nul, puisque r, p, q sont supposés n'avoir aucun facteur commun.

La substitution $u = v : r$ ramène le cas actuel au cas $r = 1$. L'équation (1) se transforme, en effet, en la suivante :

$$(12) \quad v^3 + prv + qv^2 = 0,$$

et l'on a ici

$$\Delta = r^3(4p^3 + 27rq^2), \quad \beta = \lambda + \mu, \quad \gamma = 2\lambda + \nu.$$

Il en résulte que, si v_1, v_2, v_3 désignent les branches de la fonction v , v_1, v_2, v_3 s'expriment par les formules (5) si $2\gamma - 3\beta$ ou $\lambda - 3\mu + 2\nu$ est négatif, par les formules (8) si $\lambda - 3\mu + 2\nu$ est positif, et par les formules (11) si $\lambda - 3\mu + 2\nu$ est nul.

En revenant maintenant aux fonctions u_1, u_2, u_3 par les égalités

$$u_1 = \frac{v_1}{r}, \quad u_2 = \frac{v_2}{r}, \quad u_3 = \frac{v_3}{r},$$

et en appelant toujours $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ deux fonctions régulières au point a et non nulles en ce point, on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} u_1 = (z-a)^{\frac{\nu-\lambda}{3}} \varphi(z) + (z-a)^{\mu-\lambda-\frac{\nu-\lambda}{3}} \psi(z), \\ u_2 = j(z-a)^{\frac{\nu-\lambda}{3}} \varphi(z) + j^2(z-a)^{\mu-\lambda-\frac{\nu-\lambda}{3}} \psi(z), \\ u_3 = j^2(z-a)^{\frac{\nu-\lambda}{3}} \varphi(z) + j(z-a)^{\mu-\lambda-\frac{\nu-\lambda}{3}} \psi(z), \end{cases}$$

si $\lambda - 3\mu + 2\nu < 0$;

$$(14) \quad \begin{cases} u_1 = (z-a)^{\nu-\mu} \varphi(z) + (z-a)^{\frac{\mu-\lambda}{2}} \psi(z), \\ u_2 = (z-a)^{\nu-\mu} \varphi(z) - (z-a)^{\frac{\mu-\lambda}{2}} \psi(z), \\ u_3 = -2(z-a)^{\nu} \mu \varphi(z), \end{cases}$$

si $\lambda - 3\mu + 2\nu > 0$;

$$(15) \quad \begin{cases} u_1 = (z-a)^{m-\lambda} \varphi(z) + (z-a)^{m-\lambda+\frac{n}{2}} \psi(z), \\ u_2 = (z-a)^{m-\lambda} \varphi(z) - (z-a)^{m-\lambda+\frac{n}{2}} \psi(z), \\ u_3 = -2(z-a)^{m-\lambda} \varphi(z), \end{cases}$$

si $\lambda - 3\mu + 2\nu = 0$.

6m, qui peut être nul, représente la valeur commune des deux

nombres $3(\lambda + \mu)$ et $2(2\lambda + \nu)$, et n est la différence positive ou nulle $k - 6m$, entre le degré de multiplicité k de la racine α de Δ et le nombre $6m$.

6. J'ai dit que l'un au moins des trois nombres entiers λ , μ , ν était égal à zéro; d'ailleurs, si c'est λ qui est nul, μ et ν sont nuls ou différents de zéro en même temps. Il résulte de là et des formules (13), (14), (15) que les expressions de u_1 , u_2 , u_3 sont données dans tous les cas possibles par le Tableau suivant :

Cas : $\lambda = 0$.

$$3\mu > 2\nu.$$

$$\mu \neq 0, \quad \nu \neq 0.$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (z - a)^{\frac{\nu}{3}} \left[\varphi(z) + (z - a)^{\mu - \frac{2\nu}{3}} \psi(z) \right], \\ u_2 &= (z - a)^{\frac{\nu}{3}} \left[j \varphi(z) + j^2 (z - a)^{\mu - \frac{2\nu}{3}} \psi(z) \right], \\ u_3 &= (z - a)^{\frac{\nu}{3}} \left[j^2 \varphi(z) + j (z - a)^{\mu - \frac{2\nu}{3}} \psi(z) \right]; \end{aligned}$$

$$3\mu < 2\nu.$$

$$\mu \neq 0, \quad \nu \neq 0.$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (z - a)^{\frac{\mu}{2}} \left[+ \psi(z) + (z - a)^{\nu - \frac{3\mu}{2}} \varphi(z) \right], \\ u_2 &= (z - a)^{\frac{\mu}{2}} \left[- \psi(z) + (z - a)^{\nu - \frac{3\mu}{2}} \varphi(z) \right], \\ u_3 &= -2(z - a)^{\nu - \mu} \varphi(z); \end{aligned}$$

$$3\mu = 2\nu = 6m.$$

$$\mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \quad n = k - 6m \geq 0.$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (z - a)^m \left[\varphi(z) + (z - a)^{\frac{n}{2}} \psi(z) \right], \\ u_2 &= (z - a)^m \left[\varphi(z) - (z - a)^{\frac{n}{2}} \psi(z) \right], \\ u_3 &= -2(z - a)^m \varphi(z). \end{aligned}$$

Cas : $\mu = 0$.

$$\lambda \neq 0, \quad \nu \neq 0.$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (z - a)^{-\frac{\lambda}{2}} \left[+ \psi(z) + (z - a)^{\nu + \frac{\lambda}{2}} \varphi(z) \right], \\ u_2 &= (z - a)^{-\frac{\lambda}{2}} \left[- \psi(z) + (z - a)^{\nu + \frac{\lambda}{2}} \varphi(z) \right], \\ u_3 &= -2(z - a)^{\nu} \varphi(z). \end{aligned}$$

$$Cas : \nu = 0.$$

$$\lambda < 3\mu.$$

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0.$$

$$u_1 = (z-a)^{-\frac{\lambda}{3}} \left[\varphi(z) + (z-a)^{\mu-\frac{\lambda}{3}} \psi(z) \right],$$

$$u_2 = (z-a)^{-\frac{\lambda}{3}} \left[j \varphi(z) + j^2 (z-a)^{\mu-\frac{\lambda}{3}} \psi(z) \right],$$

$$u_3 = (z-a)^{-\frac{\lambda}{3}} \left[j^2 \varphi(z) + j (z-a)^{\mu-\frac{\lambda}{3}} \psi(z) \right];$$

$$\lambda > 3\mu.$$

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0.$$

$$u_1 = (z-a)^{-\frac{\lambda-\mu}{2}} \left[+ \psi(z) + (z-a)^{\frac{\lambda-3\mu}{2}} \varphi(z) \right],$$

$$u_2 = (z-a)^{-\frac{\lambda-\mu}{2}} \left[- \psi(z) + (z-a)^{\frac{\lambda-3\mu}{2}} \varphi(z) \right],$$

$$u_3 = -2(z-a)^{-\mu} \varphi(z);$$

$$\lambda = 3\mu.$$

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad n = k - 12\mu \geq 0.$$

$$u_1 = (z-a)^{-\mu} \left[\varphi(z) + (z-a)^{\frac{n}{2}} \psi(z) \right],$$

$$u_2 = (z-a)^{-\mu} \left[\varphi(z) - (z-a)^{\frac{n}{2}} \psi(z) \right],$$

$$u_3 = -2(z-a)^{-\mu} \varphi(z).$$

7. On déduit aisément de là les conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir la racine α de Δ pour que, au point α , les racines de l'équation (1) forment un, deux ou trois systèmes circulaires, et le Tableau précédent montre clairement comment se comportent ces racines selon les valeurs attribuées aux entiers λ , μ et ν .

Par exemple, pour que les racines forment un système circulaire unique, les conditions sont ou

$$\lambda = 0, \quad \mu \neq 0, \quad \nu \neq 0, \quad 3\mu > 2\nu \text{ et } \nu \text{ non multiple de } 3$$

ou

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \nu = 0, \quad \lambda < 3\mu \text{ et } \lambda \text{ non multiple de } 3.$$

Autrement dit, si α n'annule pas r , il faut et il suffit que α annule q un nombre de fois ν non divisible par 3, et p un nombre de fois μ tel que 3μ soit supérieur à 2ν ; et si α annule r , les conditions sont que α annule r un nombre de fois λ non multiple

de 3, et p un nombre de fois μ tel que 3μ soit supérieur à λ . Les trois feuillets de la surface de Riemann formeront alors un seul cycle dont le sommet sera un point de ramification du second ordre, et au point analytique $(a, 0)$ ou (a, ∞) répondra ce seul point sur la surface.

Dans le cas où deux branches seulement deviennent infinies pour $z = a$, on aperçoit immédiatement que, pour que le point a soit un pôle pour chacune d'elles, il faut et il suffit que a annule r un nombre pair de fois $\lambda = 2\rho$, et le pôle est alors d'ordre ρ .

Lorsque les trois branches deviennent infinies pour $z = a$, pour que ce point soit un pôle pour chacune, il faut et il suffit que λ égale 3μ , ou que, λ étant supérieur à 3μ , la différence $\lambda - \mu$ soit un nombre pair, ou enfin que λ , inférieur à 3μ , soit un multiple de 3.

8. J'ai considéré jusqu'à présent un point singulier a situé à distance finie. Supposons actuellement que le point ∞ soit singulier, et cherchons les expressions des branches u_1, u_2, u_3 , envisagées dans son domaine.

Soient λ', μ', ν' les degrés respectifs des polynômes r, p, q , coefficients de l'équation (1). Si l'on change z en $\frac{1}{z'}$, cette équation devient

$$(16) \quad r' z'^{-\lambda'} u^3 + p' z'^{-\mu'} u + q' z'^{-\nu'} = 0,$$

r', p', q' étant des polynômes entiers en z' , non nuls pour $z' = 0$, et u_1, u_2, u_3 deviennent des fonctions u'_1, u'_2, u'_3 de la variable z' , qu'il est bien aisé d'exprimer dans le domaine du point $z' = 0$.

Appelons, en effet, α un nombre égal au plus grand des entiers λ', μ', ν' , ou aux plus grands s'il y en a plusieurs. En multipliant par z'^α , l'équation (16) s'écrit

$$(17) \quad r' z'^{\alpha-\lambda'} u^3 + p' z'^{\alpha-\mu'} u + q' z'^{\alpha-\nu'} = 0,$$

où l'un au moins des exposants $\alpha - \lambda', \alpha - \mu', \alpha - \nu'$ est égal à zéro, les autres étant positifs. Or l'équation (17) est de la forme (1) et, relativement au point $z' = 0$ qui, par hypothèse, annule le discriminant, on a ici

$$\lambda = \alpha - \lambda', \quad \mu = \alpha - \mu', \quad \nu = \alpha - \nu'.$$

On déduit de là, *quel que soit* x ,

$$\mu - \nu = -(\mu' - \nu'), \quad \nu - \lambda = -(\nu' - \lambda'), \quad \lambda - \mu = -(\lambda' - \mu').$$

et, par suite,

$$\lambda - 3\mu + 2\nu = -(\lambda' - 3\mu' + 2\nu');$$

d'ailleurs, dans le cas où $\lambda' - 3\mu' + 2\nu'$ est nul, si $6m'$ représente la valeur commune des deux nombres $3(\lambda' + \mu')$ et $2(2\lambda' + \nu')$, il vient

$$m - \lambda = -(\mu' - \lambda').$$

Les formules (13), (14), (15) donnent donc des expressions de u'_1 , u'_2 , u'_3 faciles à écrire.

En revenant maintenant à z , on a pour u_1 , u_2 , u_3 , dans le domaine du point ∞ ,

$$u_1 = z^{\frac{\nu' - \lambda'}{3}} \varphi(z) + z^{\mu' - \lambda' - \frac{\nu' - \lambda'}{3}} \psi(z),$$

$$u_2 = j z^{\frac{\nu' - \lambda'}{3}} \varphi(z) + j^2 z^{\mu' - \lambda' - \frac{\nu' - \lambda'}{3}} \psi(z),$$

$$u_3 = j^2 z^{\frac{\nu' - \lambda'}{3}} \varphi(z) + j z^{\mu' - \lambda' - \frac{\nu' - \lambda'}{3}} \psi(z),$$

si $\lambda' - 3\mu' + 2\nu' > 0$;

$$u_1 = z^{\nu' - \mu'} \varphi(z) + z^{\frac{\mu' - \lambda'}{2}} \psi(z),$$

$$u_2 = z^{\nu' - \mu'} \varphi(z) - z^{\frac{\mu' - \lambda'}{2}} \psi(z),$$

$$u_3 = -2 z^{\nu' - \mu'} \varphi(z),$$

si $\lambda' - 3\mu' + 2\nu' < 0$;

$$u_1 = z^{m' - \lambda'} \varphi(z) + z^{m' - \lambda' - \frac{n'}{2}} \psi(z),$$

$$u_2 = z^{m' - \lambda'} \varphi(z) - z^{m' - \lambda' - \frac{n'}{2}} \psi(z),$$

$$u_3 = -2 z^{m' - \lambda'} \varphi(z),$$

si $\lambda' - 3\mu' + 2\nu' = 0$; $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ désignant deux fonctions régulières au point ∞ et non nulles en ce point, et n' étant le nombre de fois que $z' = 0$ annule $4p'^3 + 27r'q'^2$, nombre qui peut être nul.

On déduirait facilement de là les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les degrés λ' , μ' , ν' des coefficients de l'équation (1), pour que le point ∞ soit de telle ou telle nature.

SUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ANALOGUES A L'ÉQUATION DE CLAIRAUT;

Par M. E. GOURSAT.

1. On connaît depuis longtemps une classe d'équations différentielles du premier ordre, dont on obtient l'intégrale générale en remplaçant dans cette équation y' par une constante arbitraire; ce sont les équations de Clairaut ou, plus généralement, les équations de la forme

$$(1) \quad F(y', y - xy') = 0.$$

Dans plusieurs Communications, M. Raffy a appelé l'attention sur d'autres équations différentielles jouissant de la même propriété. Telle est l'équation

$$(2) \quad y = y' + \frac{e^x}{y'},$$

dont l'intégrale générale est

$$y = C + \frac{e^x}{C}.$$

Je me propose de montrer comment on peut former des équations possédant la même propriété et dépendant d'autant de fonctions arbitraires qu'on le veut.

2. Considérons d'abord une équation différentielle

$$(3) \quad y' = f(x, y),$$

où le second membre est une fonction analytique régulière dans le domaine d'un point (x_0, y_0) . On sait, d'après les théorèmes généraux de Cauchy, qu'il existe une infinité d'intégrales de cette équation, voisines du point (x_0, y_0) , et représentées par une équation de la forme

$$(4) \quad \varphi(x, y) = \text{const.},$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction régulière dans le domaine de ce point. Pour que cette fonction $\varphi(x, y)$ soit identique à la fonction f , il faut que $f(x, y)$ vérifie l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f = 0,$$

dont l'intégrale générale est donnée par une relation arbitraire entre f et $y - xf$. Dans le cas où nous nous plaçons, il n'y a donc pas d'autre solution que l'équation de Clairaut.

Mais une équation différentielle du premier ordre ne se présente pas nécessairement sous la forme simple (3). Prenons, pour fixer les idées, une équation du second degré en y'

$$(5) \quad y'^2 + P(x, y)y' + Q(x, y) = 0,$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des fonctions analytiques régulières, tant que le point (x, y) reste compris dans une certaine région R . A tout point (x, y) , l'équation (5) fait correspondre deux valeurs de y'

$$(6) \quad y' = u(x, y), \quad y' = v(x, y),$$

et nous supposons la région R assez petite pour que chacune des fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soit uniforme. Les courbes intégrales forment alors deux familles de courbes distinctes dans la région du plan considérée; par chaque point, il passe une courbe de chacune de ces deux familles et une seule.

Si, dans l'équation (5), on remplace y' par une constante arbitraire C , l'équation obtenue

$$(7) \quad C^2 + P(x, y)C - Q(x, y) = 0$$

représente aussi deux familles de courbes distinctes

$$(8) \quad u(x, y) = C, \quad v(x, y) = C.$$

Admettons maintenant que l'équation (7) représente l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée (5). Cela peut arriver de deux façons; ou bien l'équation $u = \text{const.}$ représente l'intégrale générale de l'équation $y' = u(x, y)$, et $v = \text{const.}$ l'intégrale générale de l'équation $y' = v(x, y)$, et alors l'équation (5) est une équation de Clairaut; ou bien, l'équation $u = \text{const.}$ représente l'intégrale générale de l'équation $y' = v(x, y)$, et $v = \text{const.}$ l'intégrale générale de l'équation $y' = u(x, y)$. Les fonctions u et v vérifient alors les deux équations simultanées

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

C'est précisément ce qui a lieu pour l'équation (2) citée plus haut; on peut l'écrire

$$y'^2 - yy' + e^x = 0.$$

et l'on en tire

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4e^x}}{2};$$

on a donc ici

$$u = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4e^x}}{2}, \quad v = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4e^x}}{2}.$$

On vérifie sans peine que u et v satisfont au système (9).

3. La recherche des équations du premier ordre et du second degré de la forme (5), qui s'intègrent de cette façon, est donc ramenée à l'intégration du système d'équations simultanées (9). Si l'on élimine l'une des inconnues, v par exemple, on est conduit à l'équation suivante du second ordre, où p, q, r, s, t désignent, d'après les notations habituelles, les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction inconnue u

$$(10) \quad qr + (qu - p)s - put = 0.$$

L'équation (10) est intégrable par la méthode de Monge; elle admet l'intégrale intermédiaire

$$(11) \quad p + qu = \varphi(u),$$

où $\varphi(u)$ désigne une fonction arbitraire. On le vérifie immédiatement en observant que le premier membre de l'équation (10) est identique au déterminant fonctionnel

$$\frac{D(p + qu, u)}{D(x, y)}.$$

L'équation (11) est linéaire et son intégration se ramène à celle du système d'équations différentielles

$$(12) \quad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{u} = \frac{du}{\varphi(u)};$$

comme $\varphi(u)$ est une fonction arbitraire de u , on peut poser

$$\frac{1}{\varphi(u)} = \psi(u).$$

$\psi(u)$ étant aussi une fonction arbitraire. L'intégrale générale du système (12) est alors donnée par les formules

$$\begin{aligned}x - \psi'(u) &= C, \\y - u\psi'(u) + \psi(u) &= C',\end{aligned}$$

et, par suite, l'intégrale générale de l'équation (10) est fournie par une équation de la forme

$$(13) \quad y - u\psi'(u) + \psi(u) = f[x - \psi'(u)],$$

f et ψ étant deux fonctions arbitraires. Si l'on prend, par exemple, $\psi(u) = u$, l'intégrale générale de l'équation $p + qu = u$ est

$$y - u - f(x - \log u) = 0;$$

avec la fonction $f(x) = e^x$, nous retombons sur l'équation (2)

$$y - y' - \frac{e^x}{y'} = 0.$$

4. En résumé, l'équation

$$(13) \quad y - u\psi'(u) + \psi(u) = f[x - \psi'(u)],$$

jointe à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

donne l'intégrale générale du système (9). On a donc le moyen de former toutes les équations de la forme (5), dont on obtient l'intégrale générale en y remplaçant y' par C . Mais ici se place une remarque essentielle. Une fois qu'on a choisi les deux fonctions arbitraires f et ψ , l'équation (13) nous donne pour u une fonction déterminée de x et de y ; on a ensuite v par la formule

$$v = - \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}},$$

et l'intégrale générale de l'équation

$$(14) \quad [y' - u(x, y)][y' - v(x, y)] = 0$$

est bien

$$[u(x, y) - C][v(x, y) - C] = 0.$$

Mais, en général, les deux fonctions u et v sont analytiquement distinctes, de sorte que l'équation (14) se dédouble, en réalité, en deux équations distinctes du premier ordre. Il reste donc à examiner comment il faut prendre les deux fonctions f et ψ pour que u et v soient deux branches d'une même fonction analytique, comme cela a lieu pour l'équation (2).

Pour répondre à cette question, nous allons étudier les propriétés d'une équation du premier ordre

$$y' = u(x, y),$$

où la fonction u est définie par une relation de la forme (13). D'après ce qui a été établi, l'intégrale générale de cette équation est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

C désignant la constante arbitraire. Or, on tire de l'équation (13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(u - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\psi''(u)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\left(u - \frac{\partial f}{\partial x}\right)\psi''(u)}; \end{aligned}$$

l'intégrale générale est donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} - C = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x - \psi'(u) = \text{const.}$$

On voit donc que l'intégrale générale de toute équation de la forme (13)

$$y - x\psi'(y') + \psi(y') = f[x - \psi'(y')]$$

s'obtient en éliminant u entre le système des deux équations

$$(15) \quad \begin{cases} y' - u\psi'(u) + \psi(u) = f[x - \psi'(u)], \\ x - \psi'(u) = \text{const.} \end{cases}$$

La vérification directe est facile, car, si l'on regarde y' et u comme deux fonctions de x définies par les équations (15), on en tire

$$y' - u\psi''(u) \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \left[1 - \psi''(u) \frac{du}{dx} \right],$$

$$1 - \psi''(u) \frac{du}{dx} = 0;$$

par suite $y' = u$, ce qui démontre la proposition.

Pour faire l'élimination de u , on peut imaginer que l'on tire u de la seconde des équations (15) et qu'on porte sa valeur dans la première, ce qui conduit à une équation de la forme

$$y = f(C) + \varphi(x - C);$$

quand on fait varier la constante d'intégration, on voit donc que toutes les courbes que l'on obtient se déduisent de l'une d'elles par des translations. Par suite, on a la définition géométrique suivante pour les familles de courbes qui satisfont à une équation différentielle du premier ordre de la forme (13). Soient c et γ deux courbes quelconques se coupant en un point A; imaginons que la courbe c se déplace d'un mouvement de translation de façon que le point A décrive la courbe γ . Les positions successives c' , c'' , ... de la courbe mobile forment une famille de courbes C qui satisfont à une équation différentielle de la forme (13), et inversement on obtient ainsi la famille la plus générale de courbes satisfaisant à une équation de cette forme.

A la famille de courbes C correspond une famille conjuguée Γ , formée par les positions successives occupées par la courbe γ , qui se déplacerait d'un mouvement de translation de façon que le point A décrive la courbe c . Soient $u(x, y)$ le coefficient angulaire de la tangente à la courbe C qui passe par le point de coordonnées (x, y) , et $v(x, y)$ le coefficient angulaire de la tangente à la courbe Γ , qui passe par le même point. L'équation différentielle des courbes C est

$$y' = u(x, y),$$

et celle des courbes Γ ,

$$y' = v(x, y):$$

or, il est évident géométriquement que, tout le long d'une courbe C , le coefficient angulaire $v(x, y)$ de la tangente à la courbe Γ est constant, et de même, tout le long d'une courbe Γ , le coefficient angulaire $u(x, y)$ de la tangente à la courbe C est constant. Les équations

$$v(x, y) = \text{const.}, \quad u(x, y) = \text{const.}$$

représentent donc respectivement les courbes C et les courbes Γ . Telle est l'interprétation géométrique des formules qui représentent l'intégrale générale du système (9).

On peut encore donner des courbes C et Γ une définition indépendante de toute considération cinématique. Prenons dans le plan deux courbes fixes c et γ ; joignons un point m de la courbe c à un point m' de γ et soit M le milieu du segment mm' . Lorsque, le point m' restant fixe, le point m décrit la courbe c , le point M décrit une courbe homothétique à c avec $\frac{1}{2}$ pour rapport d'homothétie. Les diverses positions de cette courbe, lorsqu'on fait décrire la courbe γ au centre d'homothétie m' , forment une famille de courbes C . On obtiendrait les courbes Γ en échangeant les rôles des deux courbes c et γ .

§. Si les deux courbes c et γ sont analytiquement distinctes, il en sera de même des courbes C et Γ ; mais, si les deux courbes c et γ sont confondues, les courbes C et Γ ne seront plus analytiquement distinctes, et l'équation différentielle de ces courbes sera indécomposable. Pour obtenir des équations du premier ordre indécomposables qui s'intègrent comme l'équation de Clairaut, en remplaçant y' par une constante arbitraire, il suffira donc de prendre une courbe arbitraire C et de prendre les positions successives de cette courbe dans un mouvement de translation tel que l'un de ses points décrive la courbe dans sa position primitive. On peut encore remplacer cette construction par la suivante : on prendra les courbes homothétiques de la courbe c , avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{2}$, par rapport à ses différents points pris pour centres d'homothétie. On remarquera que les courbes intégrales de l'équation différentielle ainsi obtenue sont toutes superpo-

sables, propriété qui rapproche encore cette équation de l'équation de Clairaut.

Par exemple, l'équation

$$y = C + \frac{e^x}{C}$$

peut s'écrire

$$y - y_0 = e^{x-x_0},$$

avec la condition $y_0 = e^{x_0}$. On voit que toutes ces courbes sont les positions successives de la courbe $y = e^x$ lorsque le point (x_0, y_0) décrit cette courbe elle-même.

6. Au lieu de prendre une équation du second degré en y' , on pourrait, pour former des équations analogues à l'équation de Clairaut, considérer des équations d'un degré quelconque en y' , et reprendre les raisonnements du n° 2. Par exemple, en prenant une équation du troisième degré, on est conduit au système suivant

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

tout à fait analogue au système (9). L'élimination de deux des fonctions inconnues u, v, w conduit à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre.

NOTE RELATIVE AUX ASYMPTOTES ET AUX CERCLES DE COURBURE;

Par M. G.-A. LAISANT.

THÉORÈME.— *Soit une courbe plane Γ ayant une asymptote Δ . Si l'on transforme la figure par inversion par rapport à un point O du plan, la courbe Γ se transforme en une courbe Γ_1 passant par O, et la transformée de l'asymptote Δ n'est autre que le cercle de courbure Δ_1 de la courbe Γ_1 au point O.*

Pour démontrer analytiquement cette proposition, il suffit de remarquer que la valeur du rayon de courbure en coordonnées polaires est donnée par la formule

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \rho \rho'' - \rho' \rho'}$$

Si donc on rapporte la courbe Γ_1 à un axe polaire passant en O, que l'on prend pour origine, et ayant par exemple une direction parallèle à celle de l'asymptote Δ , le rayon de courbure en O, perpendiculaire à l'axe polaire, aura pour valeur $\frac{\rho'_1}{2} = R$, puisque $\rho_1 = 0$ pour le point O considéré.

Mais si nous appelons p la distance à l'origine de l'asymptote Δ , et k^2 la puissance de la transformation, nous avons

$$p = \lim (\rho \sin \omega) = k^2 \lim \frac{\sin \omega}{\rho_1}$$

pour $\omega = 0$, c'est-à-dire $p = \frac{k^2}{\rho'_1}$. Donc $R = \frac{k^2}{2p}$, ce qui démontre le théorème énoncé.

Géométriquement, la proposition est pour ainsi dire intuitive, car la transformée d'une tangente quelconque en M à la courbe Γ est une circonférence passant par O et tangente à la courbe Γ_1 au point correspondant M₁. Elle passe donc par O et par deux points infiniment voisins de M₁; or, quand M s'éloigne à l'infini, M₁ se rapproche indéfiniment de O, de sorte qu'à la limite on a pour transformée une circonférence passant par O et par deux points infiniment voisins de O, c'est-à-dire précisément la circonférence du cercle osculateur ou du cercle de courbure.

L'extrême simplicité de ce résultat est de nature à inspirer des doutes sur sa nouveauté; je ne l'ai cependant rencontré nulle part, et plusieurs mathématiciens que j'ai consultés ne le connaissaient pas non plus. Dans tous les cas, cette proposition, nouvelle ou non, présente un sérieux intérêt, même au point de vue de l'enseignement, car elle tend à fusionner en une seule les deux théories des asymptotes et des rayons de courbure, qui semblent *a priori* bien distinctes l'une de l'autre.

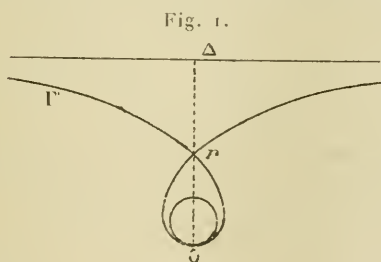
Toute détermination de rayon de courbure, par exemple, se déduira immédiatement de la détermination de l'asymptote à la courbe inverse, en prenant le point considéré pour pôle d'inversion. Réciproquement, dans certains cas, il pourra être commode de déduire du cercle de courbure, supposé connu, l'asymptote de la courbe inverse.

M. le colonel Mannheim m'a fait remarquer que cette proposition peut se rattacher à la propriété suivante, qui est bien con-

nue : La podaire d'une courbe C , par rapport à un point O , a une branche normale en O à la tangente Od à la courbe; son cercle de courbure en O a pour diamètre Od , en désignant par d le point de contact.

Or, cette podaire et ce cercle sont les transformées par inversion (O étant le pôle) de Γ et Δ , polaires réciproques de C et d , par rapport à une circonférence de centre O . Il suffit maintenant de remarquer que Δ est l'asymptote de Γ , puisque la tangente Od passe par O .

M. Mannheim a bien voulu m'indiquer, en outre, la très intéressante application que voici : Γ est une strophoïde droite; le point double r est au milieu de la perpendiculaire abaissée du sommet O sur l'asymptote Δ . La courbe est une anallagmatique par rapport à O , et alors le cercle transformé de Δ est le cercle de courbure de la courbe elle-même; son diamètre est la moitié de Or ; en outre, dans les circonstances particulières de la question, ce cercle a un contact du troisième ordre avec la courbe.



On pourrait multiplier les exemples et les applications. Je me bornerai, sans développements, pour terminer, à l'énoncé suivant : Si une courbe a trois asymptotes, sa transformée par inversion, le pôle étant le centre du cercle inscrit au triangle des asymptotes, a en ce pôle un point triple pour lequel les rayons de courbure des trois branches de la courbe sont égaux.

Il y aurait sans doute à étudier l'extension de quelques-unes de ces considérations à la Géométrie de l'espace. C'est un sujet sur lequel je reviendrai peut-être.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 AVRIL 1895.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. D. André : *Sur la structure des permutations circulaires.*

M. Fleury : *Sur une fausse propriété attribuée aux séries dites semi-convergentes.*

M. Lecornu : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. P. APPELL adresse la Note suivante :

Sur la théorie du frottement de roulement.

Dans un article inséré au numéro de janvier 1895 du *Journal des Savants*, M. Bertrand, à l'occasion des recherches de M. Deforges sur le pendule, s'occupe du frottement de roulement. Il trouve la théorie qu'on en donne ordinairement fort peu satisfaisante et cite comme mauvais cet énoncé d'un livre classique : « Le frottement de roulement résulte de ce que le point d'application de la réaction de l'un des corps se trouve situé en avant du point de contact géométrique de leurs surfaces. »

Le désaccord entre M. Bertrand et les auteurs qui ont écrit sur le frottement de roulement est, pour une grande partie, mais non pour le tout, une question de mots. M. Bertrand appelle *frottement de roulement* la force que les auteurs des *Traité*s modernes les plus estimés regardent comme une variété de *frottement de glissement*; puis il considère comme négligeable le couple que ces auteurs appellent *frottement de roulement* et qui peut être regardé, avec raison, comme produisant le déplacement de la réaction normale en avant du point géométrique de contact.

Je demande la permission d'exposer brièvement les raisons pour lesquelles la théorie classique du frottement de roulement me paraît préférable à celle que propose M. Bertrand.

Prenons un exemple précis et imaginons une roue verticale restant en contact avec un sol plan; son déplacement élémentaire

résulte d'un glissement le long du sol et d'un roulement autour d'un axe situé dans le plan du sol. On appelle alors *frottement de glissement* une force tangentielle contenue dans le plan du sol *s'opposant au glissement* et *frottement de roulement* un couple dont le plan est normal au sol *s'opposant au roulement*. Le frottement de glissement est égal à la réaction normale N multipliée par un coefficient f à peu près constant; le moment du couple du frottement de roulement suit des lois mal connues : en le représentant par $N\delta$, on appelle la petite longueur δ le coefficient du frottement de roulement. Dans la plupart des cas où il y a glissement, ce couple peut être négligé, car le travail résistant du frottement de glissement est bien plus grand que celui du couple du frottement de roulement.

Considérons maintenant le cas particulier où la roue ne fait que rouler : alors le glissement disparaît, mais la *force du frottement de glissement ne disparaît pas*, car il faut toujours que le sol exerce une action tangentielle empêchant le glissement de se produire; seulement cette force tangentielle suit alors les lois du frottement de glissement à l'état statique : sa direction n'est assujettie à aucune condition et sa grandeur est assujettie à la seule condition d'être moindre que fN ; elle est, sous cette restriction, complètement déterminée par les forces appliquées et la nature même du mouvement; il n'y a évidemment pas lieu d'en chercher les lois; aussi ne les cherche-t-on dans aucun des Traités classiques. Cette composante tangentielle n'absorbe plus de travail, car elle est appliquée à un point de vitesse nulle. Mais alors *on ne peut plus négliger le couple du frottement de roulement* qui, lui, absorbe du travail; pour connaître le moment $N\delta$ de ce couple, il faut chercher expérimentalement comment δ est lié au rayon de la roue et peut-être à sa vitesse et à N ; c'est ce qu'ont essayé de faire divers expérimentateurs, et le problème ainsi posé a un sens très précis et un réel intérêt pratique.

Pour rendre sensible le fait que le couple du frottement de roulement n'est pas négligeable dans le roulement, imaginons un cylindre très lourd posé sur un sol horizontal; tout le monde sait qu'il faut un certain effort pour le mettre en mouvement; quand l'effort est trop petit, le cylindre ne glisse pas à cause de la réaction tangentielle s'opposant au glissement, et il ne roule pas

parce que les réactions du sol sur la petite aire de contact développent un couple s'opposant au roulement. Quand on augmente l'effort, il arrive un moment où le cylindre roule sans glisser : c'est que le frottement de roulement est vaincu, le frottement de glissement ne l'étant pas. Si le couple du frottement de roulement était négligeable, le moindre effort ferait rouler le cylindre, puisque la réaction tangentielle n'oppose aucune résistance au roulement.

Une fois le cylindre lancé, supposons qu'on l'abandonne à lui-même : il est alors animé d'un mouvement de roulement qui serait uniforme si le couple du *frottement de roulement* n'existait pas ; c'est donc l'action de ce couple qui finit par arrêter le mouvement.

Une dernière considération, empruntée à la Mécanique analytique, montre également que c'est bien le couple et non la force tangentielle qui doit être appelé frottement de roulement. On dit, en Mécanique analytique, qu'une liaison est réalisée sans frottement quand, pour tout déplacement compatible avec la liaison, le travail des forces de liaison est nul. Supposons que la liaison imposée à une roue soit de rouler sur un plan : si la réaction du plan se réduit à la composante normale et à la composante tangentielle, le roulement a lieu sans frottement, car le travail des forces de liaison est nul. Il n'en est plus ainsi lorsque les réactions du plan produisent en outre un couple s'opposant au roulement.

SÉANCE DU 19 AVRIL 1895.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. H.-A. Schwarz : *Sur un problème du calcul des variations.*

M. Sophus Lie : *Contribution à la théorie des transformations de contact.*

M. Bioche : *Sur une surface du troisième ordre admettant une cubique gauche comme ligne asymptotique.*

M. N. Delaunay : *Sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.*

M. N. DELAUNAY présente certains instruments propres à la transformation des mouvements : 1° ellipsographe; 2° projecteur; 3° hyperbolographe; 4° duplicateur; 5° transformateur de la giration en quatre mouvements rectilignes approchés; 6° transmetteur pantographique des girations.

M. G.-B. GUCCIA fait la Communication suivante :

**Sur une expression du genre des courbes gauches algébriques
douées de singularités quelconques.**

Si $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont les équations irréductibles de deux surfaces algébriques, d'ordres n_1 et n_2 , dont les premiers membres renferment linéairement des paramètres arbitraires $\lambda'_1, \lambda''_1, \dots, \lambda'_2, \lambda''_2, \dots$, la fonction $\Omega(n_1, n_2)$, qui exprime le genre de la courbe mobile (K) , variable avec les deux groupes de paramètres $(\lambda_1), (\lambda_2)$ et intersection résiduelle de deux surfaces F_1 et F_2 , est de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega(n_1, n_2) = n_1(D + \pi_2 + 1) + n_2(D + \pi_1 + 1) \\ \quad \quad \quad - n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 1) + 1 + L, \end{array} \right.$$

où D est l'ordre de la courbe mobile (K) ; $\pi_i (i = 1, 2)$ est le genre des sections planes de la surface F_i ; L une constante qui est nulle si les deux systèmes linéaires F_1 et F_2 n'ont en commun aucune de leurs singularités bases.

Exemples. — 1° Si (K) est l'intersection complète des surfaces génériques des deux systèmes linéaires $F_1 = 0, F_2 = 0$, on doit faire $L = 0, D = n_1 n_2$, et l'on trouve

$$(2) \quad \Omega(n_1, n_2) = n_1(\pi_2 - 1) + n_2(\pi_1 - 1) + n_1 n_2 + 1.$$

En particulier, pour $n_2 = 1$, d'où $\pi_2 = 0$, on a $\Omega(n_1, 1) = \pi_1$.

2° Dans l'hypothèse précédente et pour deux surfaces génériques F_1 et F_2 dont les sections planes sont de genre zéro ($\pi_1 = \pi_2 = 0$) (surfaces réglées de genre zéro ou surface de Steiner), la formule (2) donne

$$\Omega(n_1, n_2) = n_1 n_2 - n_1 - n_2 + 1.$$

3° Pour les courbes tracées sur une surface du second ordre

($n_2 = 2, \pi_2 = 0$), la formule (1) donne en général

$$\Omega(n_1, 2) = 2D + n_1(D - 2n_1 - 3) + 2\pi_1 - 1 + L;$$

et dans le cas où (K) est l'intersection complète d'une surface de second ordre avec une surface du système linéaire $F_1 = 0$ douée de singularités bases quelconques, la relation (2) devient

$$\Omega(n_1, 2) = n_1 + 2\pi_1 - 1.$$

J'étais parvenu à cette dernière formule par une voie toute différente, dans une Note insérée dans les *Rendiconti* de l'Académie des Lincei (séance du 7 avril 1889).

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE;

Par M. L. LECORNU.

Soit $X = f(x)$ une fonction uniforme de x . Considérons la substitution (x, y) définie par l'équation à coefficients constants

$$(1) \quad \varphi(x, y) = axy + b(x + y) + c = 0,$$

et cherchons si la fonction $f(x)$ peut être déterminée de manière à vérifier l'équation de même forme

$$(2) \quad \Phi(X, Y) = AXY + B(X + Y) + C = 0.$$

Supposons d'abord A différent de zéro. On peut écrire

$$(AX + B)(AY + B) = B^2 - AC.$$

Si donc on pose $X_1 = \frac{AX + B}{\sqrt{B^2 - AC}}$, $Y_1 = \frac{AY + B}{\sqrt{B^2 - AC}}$, il vient

$$(3) \quad X_1 Y_1 = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$X_1 = \frac{1 + X_1}{1 + Y_1}.$$

Sous cette dernière forme, on voit que la fonction X_1 est le quotient d'une fonction de x par la même fonction de y .

Réciproquement, le quotient $\frac{\psi(x)}{\psi(y)}$, quelle que soit la fonction uniforme $\psi(x)$, vérifie identiquement l'équation (3), dont il constitue par suite la solution générale. On en déduit la solution générale de (2), qui est

$$(5) \quad AX + B = \sqrt{B^2 - AC} \frac{\psi(x)}{\psi(y)}.$$

Un cas particulier de ce problème a été proposé comme question, sous le n° 474 de l'*Intermédiaire*, dans les termes suivants :

« Trouver les fonctions $f(x)$ telles que $f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

» LOUIS ROSSEL. »

On peut se demander à quelles conditions, x et y étant réels, ainsi que les coefficients des équations (1) et (2), il existe des solutions également réelles. Si $B^2 - AC$ est positif, aucune difficulté : l'on n'a qu'à prendre pour $\psi(x)$ une fonction réelle. Quand $B^2 - AC$ est négatif, le résultat ne peut être réel que si le quotient $\frac{\psi(x)}{\psi(y)}$ est purement imaginaire. Or, ceci est impossible, attendu que si l'on avait, par exemple,

$$\text{Arg. } \psi(x) - \text{Arg. } \psi(y) = \frac{\pi}{2},$$

la permutation de x avec y donnerait, puisque la fonction $\psi(x)$ est supposée uniforme,

$$\text{Arg. } \psi(y) - \text{Arg. } \psi(x) = \frac{\pi}{2},$$

équation incompatible avec la précédente. Il faut donc que $B^2 - AC$ soit positif. Si $B^2 - AC = 0$, la fonction X se réduit à une constante déterminée par l'équation $AX + B = 0$.

Supposons maintenant que A soit nul. L'équation (2) devient

$$B(X + Y) + C = 0,$$

ce que nous écrirons

$$\left(X + \frac{C}{2B}\right) + \left(Y + \frac{C}{2B}\right) = 0;$$

d'où

$$e^{X + \frac{C}{2B}} e^{Y + \frac{C}{2B}} = 1.$$

La fonction $e^{X + \frac{C}{2B}}$ vérifie donc l'équation (3), et l'on en déduit immédiatement

$$e^{X + \frac{C}{2B}} = \frac{\psi(x)}{\psi(y)};$$

d'où

$$X + \frac{C}{2B} = \log \psi(x) - \log \psi(y),$$

ou bien

$$(6) \quad X = \chi(x) - \chi(y) - \frac{C}{2B},$$

en posant $\chi(x) = \log \psi(x)$. Réciproquement, quelle que soit la fonction $\chi(x)$, la relation (6) répond à la question; il faut seulement avoir soin de choisir cette fonction de telle façon qu'elle soit uniforme tout au moins dans le domaine (x, y) que l'on veut considérer, sans quoi l'on ne serait pas en droit de dire que la permutation de x avec y change le signe de la différence $\chi(x) - \chi(y)$ sans changer sa valeur.

La relation (6) doit nécessairement se déduire de la relation (5) par l'hypothèse $A = 0$. Voici comment l'on passe de l'une à l'autre. Si A est infiniment petit, B et C demeurant constants, la relation (5) peut s'écrire

$$X = -\frac{B}{A} + \frac{B}{A} \left(1 - \frac{AC}{2B^2}\right) \frac{\psi(x)}{\psi(y)} = -\frac{C}{2B} \frac{\psi(x)}{\psi(y)} + \frac{B}{A} \frac{\psi(x) - \psi(y)}{\psi(y)}.$$

Pour que la valeur de X reste finie, il faut que $\frac{\psi(x) - \psi(y)}{A\psi(y)}$ soit également fini. Désignons ce quotient par $\theta(x)$, après en avoir fait disparaître y au moyen de l'équation (1). Nous aurons

$$\frac{\psi(x)}{\psi(y)} = 1 + A\theta(x),$$

et, par permutation de x avec y ,

$$\frac{\psi(x)}{\psi(y)} = \frac{1}{1 + A\theta(y)} = 1 - A\theta(y) + A\varepsilon \quad (\lim \varepsilon = 0).$$

On en déduit, en ajoutant,

$$\frac{\psi(x)}{\psi(y)} - 1 = A \frac{\theta(x) - \theta(y) + \varepsilon}{2},$$

et, par suite,

$$X = -\frac{C}{2B} \left(1 + A \frac{\theta(x) - \theta(y) + \varepsilon}{2} \right) + B \frac{\theta(x) - \theta(y) + \varepsilon}{2}.$$

Si maintenant on annule A et par conséquent ε , il reste

$$X = -\frac{C}{2B} + B \frac{\theta(x) - \theta(y)}{2},$$

ce qui concorde avec l'équation (6).

Il est naturel d'étendre la recherche précédente au système d'équations

$$(1)^{bis} \quad \varphi(x, y) = axy + bx + b'y + c = 0,$$

$$(2)^{bis} \quad \Phi(X, Y) = \Lambda XY + BX + B'Y + C = 0,$$

dans lequel les deux valeurs x, y de la variable n'interviennent plus d'une manière symétrique, non plus que les valeurs correspondantes, X et Y, de la fonction inconnue. Si la symétrie subsiste par rapport à la variable, le problème est généralement impossible, car la permutation de x avec y fournit le système d'équations simultanées

$$\Lambda XY + B X + B'Y + C = 0,$$

$$\Lambda XY + B'X + B Y + C = 0,$$

d'où, par soustraction,

$$(B - B')(X - Y) = 0,$$

et par suite, puisque B diffère de B',

$$X = Y.$$

Alors l'équation

$$\Lambda X^2 + (B + B')X + C = 0$$

fournit pour X une valeur constante, ce qui ne peut être regardé comme une solution. Il n'y a d'exception que si l'on a à la fois

$$A = C = 0, \quad B + B' = 0.$$

Dans ce cas, l'équation à vérifier est

$$(7) \quad X - Y = 0,$$

et il est facile d'y satisfaire. Si l'on pose, en effet, $X = 2\psi(x)$, et, par suite, $Y = 2\psi(y)$, on a

$$X + Y = 2[\psi(x) + \psi(y)].$$

Combinant avec l'équation précédente, on trouve

$$(8) \quad X = \psi(x) + \psi(y).$$

Réciproquement, quelle que soit la fonction uniforme $\psi(x)$, il est clair que la relation (8) fournit une solution de l'équation (7).

Quand la relation entre x et y devient dissymétrique, le problème change de face. Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que l'étude de la substitution (1)^{bis} a été précisément l'origine des découvertes de M. Poincaré sur les fonctions fuchsienues et kleinéennes. La simplicité des résultats consignés dans la présente Note tient entièrement à ce que la symétrie de l'équation (1) réduit le groupe fondamental de la substitution au type le plus élémentaire, savoir un couple de points.

SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES;

PAR M. PAUL ADAM.

Soient (S) et (S₁) deux surfaces de coordonnées x, y, z et x_1, y_1, z_1 , applicables l'une sur l'autre.

Ainsi qu'il est facile de s'en assurer, les deux surfaces (S') et (S'₁) de coordonnées

$$(1) \begin{cases} x' = x + h(z + z_1) - k(y + y_1), & x'_1 = x_1 - h(z + z_1) + k(y + y_1), \\ y' = y + k(x + x_1) - g(z + z_1), & y'_1 = y_1 - k(x + x_1) + g(z + z_1), \\ z' = z + g(y + y_1) - h(x + x_1), & z'_1 = z_1 - g(y + y_1) + h(x + x_1), \end{cases}$$

g, h, k désignant trois constantes arbitraires, sont aussi applicables l'une sur l'autre.

Cela est vrai, quelle que soit la position relative des deux surfaces (S) et (S₁); or, si l'on change cette position, ce qui peut se

faire en déplaçant seulement la surface (S_1) , par exemple, on introduira dans les formules (1) trois constantes arbitraires nouvelles (abstraction faite de constantes purement additives); par conséquent

Tout couple de surfaces applicables l'une sur l'autre est un cas particulier d'un couple dépendant de six constantes arbitraires dont on peut écrire immédiatement les coordonnées.

Voici une application simple et intéressante de la transformation (1).

Prenons pour les surfaces (S) et (S_1) l'alysséide et l'hélicoïde gauche à plan directeur

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{u^2 + a^2} \cos v, & x_1 &= u \sin v, \\y &= \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, & y_1 &= u \cos v, \\z &= a \log \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}, & z_1 &= av,\end{aligned}$$

en ayant soin d'écrire l' x_1 et l' y_1 de l'hélicoïde $u \sin v$ et $u \cos v$, au lieu de les écrire, comme on le fait habituellement, $u \cos v$ et $u \sin v$.

Faisons $g = h = 0$ et changeons y'_1 en $-y'_1$; nous aurons, pour les surfaces (S') et (S'_1) ,

$$(2) \quad \begin{cases} x' = (\sqrt{u^2 + a^2} - ku) \cos v - k\sqrt{u^2 + a^2} \sin v, \\ y' = k\sqrt{u^2 + a^2} \cos v + (\sqrt{u^2 + a^2} + ku) \sin v, \\ z' = a \log \frac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x'_1 = (k\sqrt{u^2 + a^2} + u) \sin v + ku \cos v, \\ y'_1 = ku \sin v + (k\sqrt{u^2 + a^2} - u) \cos v, \\ z'_1 = av. \end{cases}$$

Sur la surface (S') , les courbes (u) sont des ellipses situées dans des plans parallèles à xOy et ayant leurs centres sur Oz . Les coefficients angulaires des axes de ces ellipses, rapportées dans leurs plans à des parallèles à Ox et à Oy , sont définis par l'équation

$$(4) \quad km^2 + 2m - k = 0;$$

cette équation ne dépendant pas de u , les axes de toutes les ellipses (u) sont dans deux plans rectangulaires passant par Oz .

Ces ellipses, rapportées à leurs axes, ont pour équation

$$\frac{x''^2}{(\sqrt{k^2+1}\sqrt{u^2+a^2+ku})^2} + \frac{y''^2}{(\sqrt{k^2+1}\sqrt{u^2+a^2-ku})^2} = 1;$$

celle qui correspond à $u=0$ est un cercle de rayon $a\sqrt{k^2+1}$.

Le lieu des extrémités des axes de ces ellipses se compose des deux courbes planes

$$(5) \quad \begin{cases} x'' = \frac{a}{2} \left[\sqrt{k^2+1} \left(e^{\frac{z'}{a}} + e^{-\frac{z'}{a}} \right) + k \left(e^{\frac{z'}{a}} - e^{-\frac{z'}{a}} \right) \right], \\ y'' = \frac{a}{2} \left[\sqrt{k^2+1} \left(e^{\frac{z'}{a}} + e^{-\frac{z'}{a}} \right) - k \left(e^{\frac{z'}{a}} - e^{-\frac{z'}{a}} \right) \right], \end{cases}$$

qui ne sont autres que la méridienne

$$x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right)$$

de l'alysséide, déplacée parallèlement à Oz , pour la première courbe, de la quantité négative δ définie par

$$e^{\frac{\delta}{a}} = \sqrt{k^2+1} - k,$$

et pour la seconde, de la quantité δ' , égale et de signe contraire à δ , définie par

$$e^{\frac{\delta'}{a}} = \sqrt{k^2+1} + k.$$

Les deux courbes planes (5) correspondent à des valeurs de v données par

$$\tan 2v = -k.$$

Les autres courbes (v) tracées sur (S') ne sont pas planes; mais leurs projections sur xOy sont des hyperboles de centre O qui se réduisent à leurs asymptotes quand $\tan v = -k$.

En résumé, le mode de génération de (S') est le suivant :

On prend une alysséide (S) et l'on considère deux des méridi-

diens (M) et (M') de cette surface situés dans deux plans rectangulaires; on laisse le méridien (M) fixe et l'on donne au second (M'), parallèlement à l'axe de l'alysséide, une translation arbitraire: la surface (S') est le lieu des ellipses dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de l'alysséide et dont les sommets se trouvent sur (M) et sur (M') déplacé.

Passons maintenant à la surface (S'). Pour cette surface, les courbes (u) ont comme projections sur le plan xOy des ellipses de centre O dont les axes ont leurs coefficients angulaires définis par l'équation (4). Donc :

Les courbes (u) de la surface (S') sont tracées sur des cylindres elliptiques dont les plans principaux sont les mêmes et coïncident avec les plans de symétrie de la surface (S') (plans contenant les axes des ellipses (u) tracées sur cette dernière surface).

L'équation des ellipses sections droites de ces cylindres rapportées à leurs axes est

$$(6) \quad \frac{x_1''^2}{(u\sqrt{k^2+1} + k\sqrt{u^2+a^2})^2} + \frac{y_1''^2}{(u\sqrt{k^2+1} - k\sqrt{u^2+a^2})^2} = 1.$$

En particulier, la courbe $u=0$ est une hélice circulaire tracée sur un cylindre de rayon k ; les autres courbes (u) de (S') tournent constamment dans le même sens autour de leurs cylindres respectifs quand z croît de $-\infty$ à $+\infty$; leur forme rappelle donc celle de l'hélice circulaire; pour $u = \pm ka$, l'ellipse (6) se réduit à une droite et l'on obtient deux courbes planes qui sont des sinusoïdes.

Quant aux courbes (v) de (S'), elles sont dans des plans parallèles à xOy ; d'ailleurs, d'après les équations (2) et (3), x'_1 et y'_1 se déduisent de y' et de $-x'$, en changeant u en $\sqrt{u^2+a^2}$ et *vice versa*; les valeurs de u et de $\sqrt{u^2+a^2}$ tirées des deux premières (2) sont donc celles tirées des deux premières (3), où l'on remplacerait y' par x'_1 et x' par $-y'_1$; d'après cela :

Les courbes (v) tracées sur (S'_1) sont des hyperboles dont les plans sont parallèles à xOy , et qui, en projection sur xOy , sont symétriques par rapport à Oy des hyperboles conjuguées de celles obtenues plus haut pour les projections des courbes (v) de (S') .

Pour $\tan 2v = -k$, l'hyperbole tracée sur (S'_1) se réduit à deux droites rectangulaires situées dans les plans de symétrie de (S') .

D'après ce qui précède, (S'_1) est une sorte d'hélicoïde engendré par une hyperbole variable.

En faisant $k = 0$, (S') et (S'_1) se réduisent à l'alysséide (S) et à l'hélicoïde (S_1) .

L'application que nous venons de faire nous a conduit, pour (S') et (S'_1) , à un couple rappelant, comme forme, le couple (S) , (S_1) .

Mais la transformation (1) peut remplacer un couple (S) , (S_1) par un autre (S') , (S'_1) complètement différent.

Voici, à cet égard, un exemple remarquable où l'on passe d'un système de deux cylindres à un autre comprenant un parabolôïde elliptique.

Considérons les surfaces (S) et (S_1)

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 + 2av, \\ y &= 2u^2 + v^2 - 2av - 2 \int \sqrt{b^2 + 3u^2} du, \\ z &= 2bu; \\ x_1 &= u^2 + 2v^2 - 2av - 2 \int \sqrt{b^2 + 3u^2} du, \\ y_1 &= -u^2 + v^2 + 2 \int \sqrt{b^2 + 3u^2} du, \\ z_1 &= 2 \int \sqrt{a^2 - 3v^2} dv. \end{aligned}$$

Comme z et $x + y$ ne dépendent que de u , et que z_1 et $x_1 + y_1$ ne dépendent que de v , ces équations représentent deux cylindres; on s'assure d'ailleurs sans peine que ces deux cylindres s'appliquent l'un sur l'autre avec correspondance des courbes (u) et (v) .

Appliquons à ces deux surfaces la transformation (1) en faisant

$g = h = 0$, $k = -1$; il vient les deux surfaces (S') et (S'_1)

$$x' = 2u^2 + v^2,$$

$$y' = -2av,$$

$$z' = 2bu;$$

$$x'_1 = -2 \int \sqrt{b^2 + 3u^2} du,$$

$$y'_1 = u^2 + 2v^2,$$

$$z'_2 = 2 \int \sqrt{a^2 - 3v^2} dv,$$

dont la première est le *paraboloïde elliptique*

$$x' = \frac{y'^2}{4a^2} + \frac{z'^2}{2b^2}.$$

Je reviendrai, dans un prochain article, sur ce dernier couple (S') , (S'_1) .

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1^{er} MAI 1893.

PRÉSIDENTE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. D. André : *Sur la structure des permutations circulaires.*

M. Goursat : *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. G. Kobb adresse une Note *Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe.*

M. TUCHE fait la Communication suivante :

Équation d'une trajectoire fluide.

Considérons un système fluide symétrique autour d'un axe et n'ayant pas de rotation autour de cet axe. Toutes les trajectoires seront planes et chacun des plans passant par l'axe contiendra des trajectoires identiques.

Considérons le cas du mouvement permanent, négligeons les forces extérieures et supposons la densité constante.

Soient mn un élément de trajectoire et nr un élément de courbe orthogonale. Nous pouvons choisir le point r de telle manière que la pression en ce point soit la même qu'au point m . Soient $mn = ds$ et $nr = ds_1$; nous pouvons aussi choisir sur nr un point r' tel que la tangente à la trajectoire qui passe par ce point soit parallèle à la tangente à la trajectoire qui passe par le point m ; soit $mr' = ds'_1$.

La première des équations générales du mouvement des fluides transformées nous donne, dans les conditions où nous nous plaçons (1) :

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds = -v_1 \frac{dv_1}{ds} ds$$

et la seconde

$$(2) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds'_1} ds_1 = -v_1^2 \frac{dz}{ds} ds_1.$$

Remarquons que la variation de pression de m en n est la même que celle de r en n , puisque m et r ont la même pression; donc, dans les équations (1) et (2), les premiers membres sont égaux et l'on a

$$v_1 \frac{dv_1}{ds} ds = v_1^2 \frac{dz}{ds} ds_1$$

ou

$$(3) \quad \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} ds = \frac{dz}{ds} \frac{ds_1}{ds} ds.$$

Dans les conditions où nous nous plaçons, l'équation de continuité transformée nous donne (2)

$$(4) \quad \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{ds} ds = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial' z}{\partial s'_1} ds_1.$$

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXI, p. 72.

(2) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXI, p. 129.

Les deux premiers membres de (3) et (4) étant égaux, on aura

$$(5) \quad \frac{\partial z}{\partial s'} ds + \frac{\partial' z}{\partial s''} ds = \frac{dz}{ds} \frac{ds_1}{ds} ds.$$

Comme les tangentes aux trajectoires en m et en r' sont parallèles, dz représente à la fois l'angle des deux tangentes à la trajectoire en m et en n , et l'angle des deux tangentes en r' et en n aux trajectoires qui passent par ces points; or, ce dernier angle est $-\frac{\partial z}{\partial s'} ds'_1$; on aura donc

$$-\frac{\partial z}{\partial s'} ds'_1 = \frac{dz}{ds} ds$$

ou

$$\frac{\partial z}{\partial s'} ds = -\frac{dz}{ds} \frac{ds}{ds'_1} ds.$$

En substituant dans (5), il vient

$$-\frac{dz}{ds} \frac{ds}{ds'_1} ds + \frac{\partial' z}{\partial s''} ds = \frac{dz}{ds} \frac{ds_1}{ds} ds$$

ou

$$(6) \quad \frac{\partial' z}{\partial s''} ds = \frac{dz}{ds} \left(\frac{ds_1}{ds} + \frac{ds}{ds'_1} \right) ds.$$

Soit I le point de rencontre de nm prolongé avec l'axe de symétrie; prenons l'axe de symétrie pour axe des y et une perpendiculaire à cet axe pour axe des x .

Considérons au point m une perpendiculaire mm' au plan mnr (plan du tableau) et de longueur égale à ds'' ; ds'' est égal à ds ou mn ; l'angle $\frac{\partial' z}{\partial s''} ds$ est l'angle mIm' , ou $\frac{mm'}{Im}$, ou $\frac{mn}{Im}$; or $\frac{mn}{Im}$ est égal à $\frac{dx}{x}$, en appelant x l'abscisse du point m et dx la différentielle de l'abscisse lorsque l'on passe du point m au point n . Donc $\frac{\partial' z}{\partial s''} ds$ est égal à $\frac{dx}{x}$ et il vient

$$\frac{dx}{x} = dz \left(\frac{ds_1}{ds} + \frac{ds}{ds'_1} \right).$$

SÉANCE DU 15 MAI 1893.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Démission :

M. Paul Genty adresse sa démission de membre de la Société.

Communications :

M. Bioche : *Sur les surfaces du troisième ordre à trois points doubles et à centre.*

M. Raffy : *Sur les courbes unicursales.*

M. GOURSAT cherche tous les arcs commensurables avec la circonférence et dont une ligne trigonométrique a pour carré un nombre rationnel. Il montre que, pour le premier quadrant, ces arcs sont ceux de 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , et ceux-là seulement.

M. Maupin adresse deux Notes : *Sur une question de probabilités traitée par d'Alembert dans l'Encyclopédie*, et *Sur une application de la règle des parties au jeu de la manille aux enchères.*

M. d'Ocagne adresse une *Étude géométrique sur l'hélicoïde réglé le plus général.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR L'HÉLIOÏDE RÉGLÉ LE PLUS GÉNÉRAL;

Par M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Je considère ici l'hélicoïde réglé le plus général, engendré par une droite qui reste tangente à un cylindre de *section quelconque* (noyau cylindrique), en rencontrant sous un angle constant une hélice tracée sur ce cylindre. On sait que cette hélice est la ligne de striction de la surface.

Le but que je me propose est de déduire géométriquement tous les éléments de courbure d'une telle surface de ceux de la section droite de son noyau cylindrique, de façon à ramener à de simples tracés linéaires toutes les constructions relatives à la courbure des lignes de la surface.

courbe au point p , ε son angle de contingence. On a

$$(1) \quad d(p) = pc \varepsilon.$$

D'autre part, si mn est la normale à la section horizontale cherchée, nous avons

$$(2) \quad dpm = cn \varepsilon.$$

Mais, si nous appelons z la distance du point p' au plan horizontal fixe M' , nous avons

$$pm = z \cot \gamma,$$

d'où, puisque γ est constant,

$$dpm = dz \cot \gamma.$$

Comme, d'ailleurs, z diminue lorsque le point p décrit sur σ un arc positif (défini par une rotation directe autour du centre de courbure c), on doit écrire

$$dz = -d(p) \tan \tau,$$

et, par suite,

$$dpm = -d(p) \tan \tau \cot \gamma.$$

La formule (2) devient donc, lorsqu'on y change les signes,

$$(3) \quad d(p) \tan \tau \cot \gamma = nc \varepsilon.$$

La division de (1) et (3) membre à membre donne

$$(4) \quad \frac{nc}{pc} = \frac{\tan \tau}{\tan \gamma},$$

nc étant compté positivement dans le sens de p vers c .

Par suite, pour les divers points de la même génératrice ($pm, p'm'$), nc est constant; autrement dit, le point n est fixe.

Ce point a reçu le nom de *pôle* de la génératrice considérée.

Les horizontales du plan tangent en (m, m') sont parallèles à la tangente mt à la section horizontale, c'est-à-dire perpendiculaires à mn .

Cette propriété permet, soit de construire le plan tangent en un

point de la génératrice considérée, soit de trouver le point où un plan mené par cette génératrice est tangent à la surface.

3. *Paramètre de distribution.* — La méthode précédente nous a permis d'établir la propriété fondamentale du pôle sans passer, comme on le fait d'ordinaire, par le calcul préalable du paramètre de distribution.

En réalité, ce paramètre, dont la considération est si importante pour l'étude des surfaces gauches en général, se trouve ici n'avoir qu'un intérêt secondaire en raison de la simplicité des constructions fondées sur l'emploi du pôle. Nous allons néanmoins faire voir comment de la formule (4) précédente se peut déduire la valeur de ce paramètre.

La formule classique de Chasles nous donne pour expression de ce paramètre k , en appelant θ l'angle que le plan tangent en (m, m') fait avec le plan central, c'est-à-dire le plan vertical passant par pm ,

$$k = \frac{p'm'}{\tan \theta} = \frac{pm}{\cos \gamma \tan \theta}.$$

L'angle θ est défini en valeur absolue par la formule

$$\tan \theta = \frac{\tan \alpha}{\sin \gamma},$$

α étant l'angle que l'horizontale mt du plan tangent fait avec le plan vertical pm . Mais il faut observer que, lorsque les angles α et γ sont comptés dans le sens direct, l'angle θ de la formule précédente est compté dans le sens rétrograde. On devra donc prendre

$$\tan \theta = - \frac{\tan \alpha}{\sin \gamma}.$$

Il vient, par suite,

$$k = - pm \frac{\tan \gamma}{\tan \alpha},$$

ou, puisque l'angle pnm est égal à α ,

$$k = - pn \tan \gamma.$$

Mais la formule (4) donne

$$\frac{pn}{pc} = - \frac{\tan \gamma - \tan \tau}{\tan \gamma}.$$

Il vient donc finalement

$$(5) \quad k = pc(\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\tau).$$

Remarque. — Tous les résultats établis jusqu'ici, ne supposant nullement que l'angle τ soit constant, sont vrais pour toutes les surfaces gauches à cône directeur de révolution.

4. *Rayon de courbure de la section de la surface par un plan horizontal.* — La section de la surface par le plan M' est le lieu du point m lorsque le point p varie sur σ . Nous venons de voir que la normale mn à cette courbe coupe pc en un point n tel que

$$\frac{nc}{pc} = \frac{\operatorname{tang}\tau}{\operatorname{tang}\gamma}.$$

Puisque les angles τ et γ sont constants, ce rapport est constant. Donc, en vertu d'un théorème bien connu (¹), si c_1 est le centre de courbure de la développée de σ , qui est une donnée de la question, et si la normale, au lieu du point n , coupe cc_1 en v , on a

$$\frac{vc_1}{cc_1} = \frac{nc}{pc}.$$

Il suffit donc, par le symétrique u de n par rapport au milieu de pc , de mener la parallèle uv à pc_1 pour avoir le point v .

Soit maintenant e le centre de courbure cherché, c'est-à-dire le point où mn touche son enveloppe. La normale à cette enveloppe, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en e à mn , coupe la normale nv au point f . Dès lors on a entre les différentielles des arcs décrits simultanément par les points m, n, p , les relations

$$\frac{d(m)}{d(n)} = \frac{me}{nf}, \quad \frac{d(n)}{d(p)} = \frac{nv}{pc}, \quad \frac{d(p)}{d(m)} = \frac{pc}{mn},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{me.nv}{nf.mn} = 1$$

(¹) MANNHEIM, *Développements de Géométrie cinématique*, p. 16.

ou

$$(6) \quad \frac{nv}{nf} = \frac{mn}{me}.$$

Pour tirer de cette relation une construction géométrique simple du point e , remarquons que, si la perpendiculaire élevée en n à mn coupe mv en i , la transversale ei donne dans le triangle mno

$$\frac{iv.em.\mu n}{im.en.\mu v} = 1;$$

d'où

$$(7) \quad \frac{\mu n}{\mu v} = \frac{im.en}{iv.em}.$$

Mais, puisque ni est parallèle à ef , on a

$$\frac{nv}{nf} = \frac{iv}{if},$$

et, par suite, en vertu de la formule (6),

$$\frac{iv}{if} = \frac{mn}{me},$$

d'où

$$iv.em = -if.mn.$$

La formule (7) devient dès lors

$$\frac{\mu n}{\mu v} = -\frac{im.en}{if.mn} = -\frac{im.ne}{if.mm} = -1.$$

Elle montre que le point μ est le milieu de nv .

La construction du point e , une fois le point v obtenu comme il a été dit plus haut, se réduit donc à ceci : *Élever en n à mn une perpendiculaire qui coupe mv en i ; la droite qui joint le point i au milieu μ de nv coupe mn au centre de courbure cherché.*

5. *Asymptotes de l'indicatrice.* — La génératrice $(mp, m'p')$ constitue une asymptote de l'indicatrice au point (m, m') . Pour avoir la seconde asymptote, nous nous fonderons sur ce que deux droites du plan tangent, conjuguées par rapport à l'indicatrice, le

sont aussi par rapport à ses asymptotes, en remarquant d'ailleurs que cette propriété est projective.

Cherchons, par exemple, la droite conjuguée de la tangente mt à la section horizontale. D'après le théorème de Dupin, cette droite est la caractéristique du plan tangent en (m, m') lorsque ce point se déplace sur la section horizontale; cette caractéristique est la droite qui joint le point (m, m') au point où la trace du plan tangent sur un plan quelconque, par exemple sur le plan horizontal P' , touche son enveloppe.

Cette trace, parallèle à l'horizontale mt du plan tangent, est la perpendiculaire pq abaissée de p sur mn . Pour trouver le point g , où pq touche son enveloppe, remarquons : 1° que, l'angle pqm étant droit, la normale à la courbe décrite par le point q passe par le point de rencontre l des normales aux enveloppes des côtés pq et qm , c'est-à-dire des perpendiculaires élevées en g et en e à ces côtés; 2° que, dans le déplacement considéré, le point p décrit non pas la courbe σ , mais bien la section horizontale de la surface passant en p , et, par suite, que la normale au lieu décrit par p , confondue avec pe , doit être considérée comme coupant cette droite au point n , ainsi que le font les normales à toutes les sections horizontales le long de pm .

Dès lors, on a entre les différentielles des arcs décrits simultanément par les points m, p, q , pour le déplacement considéré,

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{mn}{pn}, \quad \frac{d(p)}{d(q)} = \frac{pk}{ql}, \quad \frac{d(q)}{d(m)} = \frac{ql}{me},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{mn.pk}{pn.me} = 1,$$

ou

$$\frac{pk}{pn} = \frac{me}{mn},$$

ce qui montre que la droite ke est parallèle à pm . De là cette construction pour le point g : *Mener ek parallèlement à mp , puis kg parallèlement à mn .*

Puisque, en projection horizontale, les droites mg et mt sont conjuguées harmoniques par rapport à mp et à la seconde asym-

ptote mr cherchée, et que d'ailleurs pq est parallèle à mt , le point r est le symétrique de p par rapport à g .

Puisque pr est la trace du plan tangent sur le plan horizontal de (pp') , la projection verticale r' de r est sur l'horizontale de p' .

On a donc ainsi les asymptotes $(mp, m'p')$ et $(mr, m'r')$ de l'indicatrice en (m, m') .

6. *Indicatrice.* — Il est très facile, après cela, de construire les projections de cette indicatrice elle-même. En effet, les projections de la normale en (m, m') à la surface sont mn , perpendiculaire à la trace horizontale pq du plan tangent, et $m'n'$, perpendiculaire à la ligne de front $p'm'$ de ce plan. D'après le théorème de Meusnier, le centre de courbure de la section normale passant par $(mt, m't')$, est à la rencontre de cette normale et de la verticale du point e . Amenons le plan vertical de la normale à être de front, par rotation autour de la verticale de (m, m') . La normale se projette alors en $(mn_0, m'n'_0)$, le point (t, t') en (t_0, t'_0) . Par suite, on a en ε'_0 le point où vient le centre de courbure de la section normale considérée, et $m'\varepsilon'_0$ donne le rayon de courbure R de cette section. Il suffit donc de porter sur mt le segment mt égal à $\sqrt{\lambda R}$, λ étant une longueur constante quelconque, pour avoir le point (t, t') de l'indicatrice.

Sur chacune des projections on connaît les deux asymptotes de l'indicatrice et un de ses points; cette indicatrice est donc complètement déterminée. Il serait facile de la tracer point par point.

On aurait les directions principales au point (m, m') en prenant les bissectrices des droites $(mp, m'p')$ et $(mr, m'r')$ de l'espace et les rayons de courbure principaux en déterminant la longueur des axes de l'indicatrice, problèmes faciles à résoudre au moyen d'un rabattement du plan tangent contenant l'indicatrice sur le plan horizontal passant par $(mt, m't')$.

MÉMOIRE SUR LES SÉQUENCES DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES;

Par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

INTRODUCTION.

1. Le présent Mémoire est un travail d'ensemble sur les *séquences des permutations circulaires*. Nous nous y proposons de traiter, en une seule fois, pour les séquences de ces permutations, la plupart des questions que nous avons traitées, dans nos Mémoires antérieurs ⁽¹⁾, pour les *séquences des permutations rectilignes*, c'est-à-dire des permutations ordinaires. Les six Chapitres dont ce Mémoire se compose sont tous consacrés à cet unique objet.

2. Nous définissons d'abord (Ch. I) les permutations circulaires des n premiers nombres, et nous leur étendons les notions de *maxima*, de *minima* et de *séquences*.

Désignant par $Q_{n,s}$ le nombre des permutations circulaires de n éléments qui présentent chacune s séquences, nous étudions (Ch. II) le nombre $Q_{n,2}$ des permutations circulaires qui présentent le moins de séquences, et les nombres $Q_{2v,2v}$, $Q_{2v-1,2v-2}$ de celles qui en présentent le plus.

De la considération des nombres $Q_{n,s}$, nous déduisons (Ch. III) une *formule* tout à fait *fondamentale*, reliant ces nombres entre eux, permettant de les calculer de proche en proche et d'en former un tableau triangulaire que nous nommons le *triangle des séquences des permutations circulaires*.

Les *colonnes verticales* de ce triangle s'étendent indéfiniment vers le bas. Nous montrons (Ch. IV) que les nombres composant chacune d'elles sont les termes d'une série récurrente proprement

⁽¹⁾ *Mémoire sur le nombre des permutations alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1881); *Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1884); *Mémoire sur le triangle des séquences* (*Savants étrangers*, t. XXXII); *Mémoire sur les permutations quasi alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1895).

dite; nous donnons l'ordre de cette série, ainsi que son équation génératrice.

Les *lignes horizontales* du triangle ont chacune un nombre limité de termes. Nous regardons ces termes (Ch. V) comme les coefficients d'un certain polynôme entier en x ; nous calculons, pour $x = 1$, les deux premières dérivées de ce polynôme; nous en déduisons la somme et la valeur moyenne des nombres de séquences des permutations circulaires de n éléments, la somme et la valeur moyenne des carrés de ces mêmes nombres.

Enfin (Ch. VI), nous formons une série entière en x et en y , qui est convergente pour les valeurs suffisamment petites de ces variables, et dont la somme, que nous donnons explicitement, est la fonction génératrice du *triangle tout entier*.

3. Comme nous l'avons dit en commençant (1), les différentes questions que nous traitons ainsi pour les permutations circulaires sont du nombre de celles que nous avons traitées autrefois pour les permutations rectilignes. Aussi, constamment, dans le présent travail, nous inspirons-nous de nos Mémoires antérieurs, en reproduisons-nous l'ordre et les méthodes. En particulier, nos trois derniers Chapitres sont une imitation presque servile de notre *Mémoire sur le triangle des séquences* des permutations rectilignes.

C'est pour cela, dans ces trois derniers Chapitres, que nous nous servons, pour ainsi dire, exclusivement du calcul, tandis que, dans les trois précédents, nous avons uniquement recours à des raisonnements directs, purement combinatoires.

4. Dans l'étude des permutations, comme dans la théorie des nombres et peut-être dans toute l'analyse du discontinu, il suffit d'une très légère différence dans les définitions et les énoncés, pour en produire d'énormes dans les résultats. La très légère différence qui existe, comme on le verra (6), entre la définition des permutations circulaires et celle des permutations rectilignes produit ainsi, quand on passe de celles-ci à celles-là, de continuelles simplifications, des transformations inattendues, et aussi, à un certain point de vue, un véritable appauvrissement.

Ces simplifications se manifestent dans la plupart des formules. Elles proviennent de ce que les permutations rectilignes, à cause

de leurs éléments extrêmes, présentent une certaine irrégularité, tandis que les permutations circulaires, où ces éléments extrêmes n'existent point, nous offrent une régularité absolue.

Les transformations dont nous venons de parler sont celles de plusieurs propriétés asymptotiques des permutations rectilignes en propriétés habituelles des permutations circulaires. Ce fait si remarquable tient à ce que ces propriétés asymptotiques des permutations rectilignes se rapportent à des permutations où le nombre des éléments est infiniment grand et où, par conséquent, l'irrégularité due aux éléments extrêmes est infiniment atténuée.

Quant à l'appauvrissement que nous avons signalé, il résulte de ce que, dans les permutations circulaires, le nombre des séquences est toujours pair (16). On ne peut donc partager ces permutations en deux espèces, comme nous l'avons fait pour les permutations rectilignes, d'après le nombre pair ou impair de leurs séquences. Il n'existe donc, dans les permutations circulaires, rien qui rappelle ce partage, non plus que les théorèmes si curieux auxquels il nous a conduit.

5. Il y a plusieurs années que nous avons imaginé d'étendre aux permutations circulaires les notions de maxima, de minima et de séquences qu'on n'avait encore considérées que pour les permutations rectilignes. C'est en 1893 (1) que nous avons fait connaître cette extension. Le présent Mémoire contient les résultats que nous avons obtenus alors, et tous ceux que de nouvelles recherches nous ont fait trouver depuis. Nous avons énoncé les principaux d'entre eux, sans explications ni démonstrations, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 1^{er} avril 1895.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

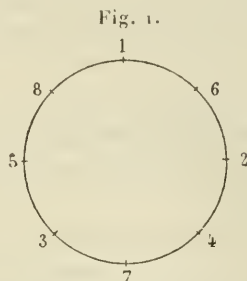
I. — DÉFINITION ET NOMBRE DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES.

6. Divisons une circonférence en n parties égales ou inégales, et, aux n points de division, plaçons, dans un ordre quelconque,

(1) Au Congrès des Sociétés savantes, le 5 avril.

n nombres distincts, ou, plus simplement, comme nous le ferons toujours, les n premiers nombres. Nous formons ainsi une *permutation circulaire* de ces n premiers nombres.

Telle est la permutation (*fig. 1*) où n est égal à 8.



7. Pour lire une permutation circulaire des n premiers nombres, on peut évidemment commencer par l'un quelconque des nombres qui la composent, et tourner dans un sens quelconque autour de la circonférence qui la supporte. Nous conviendrons de commencer toujours par le nombre 1, et de tourner toujours dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens opposé à celui de la rotation des aiguilles d'une montre.

La permutation circulaire qu'on vient de considérer (6) se lira donc

$$1 \ 8 \ 5 \ 3 \ 7 \ 4 \ 2 \ 6.$$

8. D'après ces conventions, chaque permutation circulaire des n premiers nombres se confond, à la lecture, avec une permutation rectiligne, c'est-à-dire avec une permutation ordinaire, composée de ces mêmes nombres et commençant par l'unité. Il s'ensuit immédiatement que le nombre de ces permutations circulaires est juste égal au nombre de ces permutations rectilignes.

Or, le nombre des permutations rectilignes des n premiers nombres est égal à $n!$ Le nombre de celles qui commencent par l'unité en est la $n^{\text{ième}}$ partie. Donc :

Le nombre des permutations circulaires des n premiers nombres est égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de $n!$, c'est-à-dire à $(n-1)!$

9. Mais il ne faudrait point conclure, de nos conventions sur la lecture des permutations circulaires, que nous regardons ces

permutations comme ayant chacune un premier et un dernier élément, un commencement et une fin.

Le caractère propre des permutations circulaires, c'est de n'avoir ni commencement, ni fin; de former chacune un ensemble d'une régularité parfaite, où tous les éléments sont traités de même, chaque élément s'y trouvant toujours placé entre deux autres éléments.

Les permutations rectilignes ne présentent point cette régularité. Leur premier et leur dernier élément n'y sont point placés entre deux autres. Ils introduisent ainsi, dans ces permutations, une certaine irrégularité.

C'est d'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit (4), cette régularité absolue des permutations circulaires qui explique les simplifications continuelles qui se produisent dans les formules, quand on passe des permutations rectilignes aux permutations circulaires.

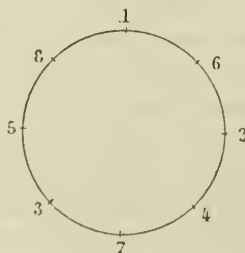
II. — MAXIMA, MINIMA ET SÉQUENCES.

10. Considérons une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres, et, dans cette permutation, l'un quelconque des nombres qui la composent.

Ce nombre est, pour nous, un *maximum*, s'il est plus grand que chacun de ses deux voisins; un *minimum*, s'il est moindre que chacun d'eux.

Dans cette même permutation, nous appelons *séquence* une suite de nombres juxtaposés, dont le premier est un maximum, le dernier un minimum, ou réciproquement, mais dont aucun intermédiaire n'est ni un maximum, ni un minimum.

Fig. 2.

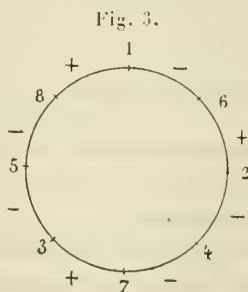


Dans la permutation circulaire (fig. 2), il y a trois maxima,

8, 7, 6; trois minima, 1, 3, 2; six séquences, 18, 853, 37, 742, 26, 61.

11. On pourrait aussi, dans une permutation circulaire quelconque, définir les maxima, minima et séquences à l'aide des signes des n différences qu'on obtient lorsque, tournant autour de la circonférence en sens direct, on retranche chaque nombre du suivant. Les n signes trouvés ainsi forment une nouvelle permutation circulaire, composée d'éléments de deux sortes : des signes + et des signes —. À chaque variation + — correspond évidemment un maximum; à chaque variation — + correspond un minimum; à chaque suite de signes identiques allant d'une variation à une autre correspond une séquence.

C'est ce que l'on voit très clairement sur la *fig. 3*.



12. Ces définitions si simples se simplifient encore à l'aide du procédé suivant.

Considérons la circonférence qui supporte une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres et, en même temps, la surface cylindrique dont cette circonférence est la section droite; traçons, sur cette surface, les génératrices passant par les points où les n nombres sont placés; prenons sur elles, à partir de la circonférence et en allant vers le haut, n longueurs proportionnelles à ces nombres; joignons enfin l'extrémité de chacune de ces longueurs à l'extrémité de la suivante par le plus petit arc possible d'hélice : nous obtenons, sur le cylindre, une ligne brisée fermée, qui est une représentation graphique de la permutation.

Cette ligne brisée évidemment présente n côtés et n sommets, Un sommet placé plus haut que ses deux voisins correspond à un

maximum; un sommet placé plus bas correspond à un minimum; une suite de côtés, tous montants ou tous descendants, allant d'un minimum à un maximum ou réciproquement, correspond à une séquence montante ou descendante de la permutation.

13. Nous venons, en quelque sorte, de donner trois définitions des maxima, minima et séquences des permutations circulaires. Les séquences évidemment sont les unes montantes, les autres descendantes. Elles peuvent avoir aussi des longueurs variables, qu'on évalue, suivant la définition qu'on adopte, par le nombre des éléments, des signes ou des côtés qui correspondent à chaque séquence.

Dans la permutation circulaire citée plus haut, à la séquence 8 5 3 correspondent trois éléments, qui sont les nombres 8, 5 et 3; deux signes, qui sont deux signes —; deux côtés, qui sont tous deux descendants.

14. D'ailleurs, les définitions qui précèdent sont pour ainsi dire identiques à celles que nous avons données pour les permutations rectilignes, dans notre *Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations*.

Cette extension aux permutations circulaires des notions de maxima, de minima et de séquences était très naturelle et très simple. Comme nous l'avons déjà dit (§), nous l'avons fait connaître pour la première fois en 1893, dans l'une des séances du Congrès des Sociétés savantes.

III. — REMARQUES SUR LES MAXIMA, MINIMA ET SÉQUENCES.

15. Si l'on considère la ligne brisée cylindrique correspondant à une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres, on s'aperçoit facilement que, dans cette ligne, les maxima alternent avec les minima. Il s'ensuit immédiatement que :

Dans toute permutation circulaire des n premiers nombres, il y a juste autant de minima qu'il y a de maxima.

16. On voit aussi facilement, sur la ligne brisée cylindrique, que les séquences de cette ligne sont alternativement montantes et descendantes. Par conséquent :

Dans toute permutation circulaire des n premiers nombres, il y a un nombre pair de séquences.

Ce nombre pair est, d'ailleurs, égal au nombre total des maxima et des minima, puisque, d'une part, chaque séquence aboutit à un maximum ou à un minimum; et que, de l'autre, chaque maximum ou minimum est l'extrémité d'une séquence.

17. Nous avons partagé ⁽¹⁾, il y a quelque temps déjà, les permutations rectilignes des n premiers nombres en deux *espèces*, d'après le nombre pair ou impair des séquences qu'elles présentent; et ce mode de partage nous a conduit ⁽²⁾ à des propositions nombreuses et importantes.

Il ne peut point s'étendre aux permutations circulaires, celles-ci ayant toujours un nombre pair de séquences. C'est là une différence nouvelle et profonde entre les permutations rectilignes et les permutations circulaires. C'est, comme nous l'avons dit plus haut (4), pour la théorie des permutations circulaires, la cause d'un véritable appauvrissement.

18. Dans les permutations circulaires des n premiers nombres, il est facile de voir entre quelles limites peuvent varier le nombre des maxima, celui des minima et celui des séquences.

Le nombre des maxima, comme celui des minima, est au moins égal à 1. Le nombre des séquences est au moins égal à 2.

Que n soit pair et égal à 2γ , ou impair et égal à $2\gamma + 1$, le nombre des maxima, comme celui des minima, est, au plus, égal à γ ; le nombre des séquences est, au plus, égal à 2γ .

Pour ne parler que des séquences, on peut donc dire :

Si l'on désigne par γ la partie entière de la moitié de n , le nombre des séquences d'une permutation circulaire quelconque de n éléments ne peut prendre que l'une des γ valeurs

$$2, 4, 6, \dots, 2\gamma.$$

(1) Dans une Note présentée à la Société philomathique de Paris, le 27 juin 1891.

(2) Voyez : *Sur le partage en quatre groupes des permutations des n premiers nombres* (Bulletin de la Société philomathique, Paris, 1892-1893); *Mémoire sur le triangle des séquences* (Recueil des savants étrangers, t. XXXII).

19. D'après ce qui précède, dans toute permutation circulaire, le nombre des maxima, celui des minima et celui des séquences sont trois nombres liés entre eux de telle sorte que la connaissance de l'un quelconque des trois entraîne immédiatement celle des deux autres. Il suffit donc, pour étudier ces trois nombres, de s'occuper d'un seul d'entre eux. Nous ne nous occuperons, dans tout ce qui va suivre, que du seul nombre des séquences.

CHAPITRE II.

GÉNÉRALITÉS SUR LES NOMBRES $Q_{n,s}$.

I. — DÉFINITION DES NOMBRES $Q_{n,s}$.

20. Considérons toutes les permutations circulaires des n premiers nombres. Nous pouvons évidemment les classer ainsi : celles qui ont 2 séquences; celles qui en ont 4; celles qui en ont 6; ...; celles qui en ont 2ν .

Dans le présent Mémoire, nous désignerons toujours par $Q_{n,s}$ le nombre des permutations circulaires de n éléments qui présentent chacune s séquences.

21. Il suffit d'un peu de patience pour déterminer directement les valeurs de $Q_{n,s}$ qui correspondent aux plus petites valeurs des indices n et s . On trouve ainsi

$$\begin{aligned} Q_{2,2} &= 1, \\ Q_{3,2} &= 2, \\ Q_{4,2} &= 4, & Q_{4,3} &= 2, \\ Q_{5,2} &= 8, & Q_{5,3} &= 16. \end{aligned}$$

Et ce qui nous frappe d'abord, c'est que, à l'exception du premier, tous ces nombres sont pairs.

22. Ce n'est point là un fait particulier. A l'exception de $Q_{2,2}$, les nombres $Q_{n,s}$ sont tous pairs. Nous nous appuierons, pour le démontrer, sur la considération des permutations circulaires *inverses* des n premiers nombres.

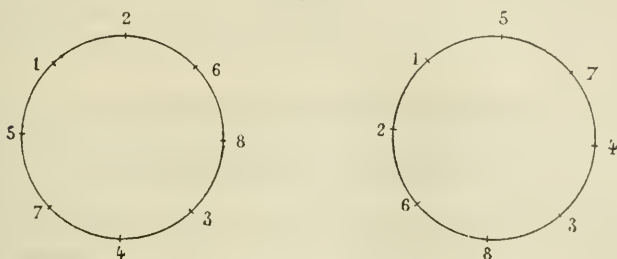
23. La définition des permutations circulaires inverses n'est que l'extension, aux permutations circulaires, de la définition

que nous avons donnée autrefois ⁽¹⁾ pour les permutations rectilignes inverses.

Deux permutations circulaires des n premiers nombres sont inverses l'une de l'autre lorsque ces nombres s'y succèdent dans deux ordres absolument inverses.

Telles sont les deux permutations circulaires (*fig. 4*).

Fig. 4.



24. La définition même des permutations circulaires inverses nous fournit un moyen simple de former l'inverse d'une permutation circulaire donnée.

Considérons, en effet, une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres; lisons-la en nous conformant aux conventions que nous avons faites (7) et, à mesure que nous en nommons les n éléments, écrivons ceux-ci, en tournant en sens rétrograde, sur une seconde circonférence partagée préalablement en n parties. Les nombres que nous écrivons sur cette nouvelle circonférence forment la permutation circulaire inverse de la permutation circulaire donnée, et il est évident que, si l'on opérât de la même façon sur cette seconde permutation, on retrouverait la première.

25. Cette manière si simple de passer d'une permutation circulaire à son inverse, et de revenir de celle-ci à celle-là, fait bien ressortir ce fait important :

Deux permutations circulaires inverses l'une de l'autre sont deux permutations conjuguées; en d'autres termes, deux permutations circulaires étant données, si la seconde est l'inverse de la première, réciproquement la première est l'inverse de la seconde.

(1) Sur le partage en quatre groupes... (*Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 1892-1893).

26. Il est évident, d'ailleurs, sauf dans le cas où $n = 2$, que deux permutations circulaires inverses diffèrent forcément l'une de l'autre.

Il est évident aussi que les séquences de ces permutations se correspondent chacune à chacune; et que, par conséquent, dans ces permutations, elles sont en nombre égal.

27. Cela étant, supposons n supérieur à 2; et, parmi les permutations circulaires des n premiers nombres, considérons celles qui présentent chacune s séquences.

Dans le système que forment celles-ci, prenons une permutation circulaire quelconque. Son inverse est une seconde permutation circulaire, qui diffère de la première et qui fait aussi partie du système. Donc les permutations circulaires considérées s'associent deux à deux. Donc leur nombre total est un nombre pair. Nous avons désigné ce nombre total par $Q_{n,s}$. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Pour toutes les valeurs de n supérieures à 2, et quel que soit s , le nombre $Q_{n,s}$ est un nombre pair.

28. On voit aisément pourquoi ce théorème est en défaut lorsque n égale 2. C'est qu'il n'existe qu'une seule permutation circulaire de deux nombres, et que cette permutation est à elle-même son inverse.

II. — EXPRESSION DE $Q_{n,2}$.

29. Aucune permutation circulaire des n premiers nombres ne peut avoir moins de deux séquences; mais il y en a qui en ont juste deux : telle est la permutation circulaire qui se lit

$$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n,$$

et qui présente la seule séquence montante $1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n$, et la seule séquence descendante $n \ 1$.

30. Nous considérons les permutations circulaires des n premiers nombres; nous désignons par $Q_{n,2}$ le nombre de celles qui présentent chacune deux séquences, et nous nous proposons de déterminer l'expression de $Q_{n,2}$ en fonction de n .

31. Pour y arriver, prenons l'une quelconque de ces permutations. Si nous la lisons conformément à nos conventions (7), c'est-à-dire en partant du nombre 1 et tournant en sens direct, nous y trouvons, d'abord, une séquence montante allant du minimum 1 au maximum n ; ensuite, une séquence descendante allant du maximum n au minimum 1.

Les nombres compris dans la séquence montante, entre 1 et n , appartiennent évidemment à la suite

$$2, 3, 4, \dots, n-1,$$

et se succèdent par ordre de grandeurs croissantes; les nombres compris dans la séquence descendante, entre n et 1, sont les nombres de cette même suite qui ne figurent pas dans la séquence montante, et ils se succèdent par ordre de grandeurs décroissantes.

Évidemment, une permutation circulaire des n premiers nombres, qui ne présente que deux séquences, est complètement déterminée dès que l'on connaît ceux des nombres 2, 3, 4, ..., $n-1$, qui appartiennent à sa séquence montante.

32. Les permutations circulaires des n premiers nombres, qui présentent chacune deux séquences, peuvent évidemment se classer ainsi :

Celles qui ne contiennent aucun nombre entre 1 et n dans leur séquence montante; celles qui en contiennent un; celles qui en contiennent deux; ...; celles qui en contiennent $n-2$.

Il n'existe qu'une seule des permutations considérées où il n'y ait aucun nombre entre 1 et n , dans la séquence montante.

Il en existe autant, présentant un seul nombre entre 1 et n , qu'il y a de combinaisons 1 à 1 de $n-2$ objets.

Il en existe autant, présentant deux nombres entre 1 et n , qu'il y a de combinaisons 2 à 2 de $n-2$ objets; etc.

Il en existe autant, présentant $n-2$ nombres entre 1 et n , qu'il y a de combinaisons $n-2$ à $n-2$ de $n-2$ objets.

33. Si nous désignons, suivant l'usage, par C_{n-2}^1 , par C_{n-2}^2 , ..., par C_{n-2}^{n-2} les nombres des combinaisons simples de $n-2$ objets 1 à 1, puis 2 à 2, ..., puis $n-2$ à $n-2$, nous pouvons donc

dire qu'il y a autant de permutations circulaires des n premiers nombres présentant chacune deux séquences, qu'il y a d'unités dans la somme

$$1 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{n-2}^{n-2},$$

c'est-à-dire dans la somme des coefficients du développement de la puissance $(n-2)^{\text{ième}}$ d'un binôme. Or, on sait que la somme de ces coefficients est égale à la $(n-2)^{\text{ième}}$ puissance de 2. Donc :

Si l'on désigne par $Q_{n,2}$ le nombre des permutations circulaires des n premiers nombres qui présentent chacune deux séquences, on a identiquement

$$Q_{n,2} = 2^{n-2}.$$

Telle est l'expression cherchée de $Q_{n,2}$ en fonction de n .

34. Nous avons trouvé précédemment (21) que les nombres

$$Q_{2,2}, \quad Q_{3,2}, \quad Q_{4,2}, \quad Q_{5,2}$$

avaient pour valeurs respectives

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8.$$

c'est-à-dire

$$2^0, \quad 2^1, \quad 2^2, \quad 2^3.$$

Cette vérification si simple de notre expression générale de $Q_{n,2}$ a un grand avantage : elle nous montre que cette expression subsiste même pour $n=2$, et, par conséquent, qu'elle est vraie pour toutes les valeurs possibles de n .

35. Dans notre *Mémoire sur le triangle des séquences* des permutations rectilignes ⁽¹⁾, nous avons démontré un théorème général d'où il résulte, comme cas particulier, que si l'on désigne par $P_{n,2}$ le nombre des permutations rectilignes de n éléments qui présentent chacune deux séquences, et que l'on fasse croître n indéfiniment, on a

$$\lim \frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}} = 2.$$

(¹) *Recueil des savants étrangers*, t. XXIII.

D'après l'expression de $Q_{n,2}$ en fonction de n que nous avons donnée plus haut (33), on a, quel que soit n ,

$$\frac{Q_{n+1,2}}{Q_{n,2}} = 2.$$

C'est là un premier exemple de ces transformations dont nous avons parlé précédemment (4), et en vertu desquelles une propriété asymptotique des permutations rectilignes se change en une propriété habituelle des permutations circulaires.

III. — PROPRIÉTÉS DES NOMBRES $Q_{2\nu, 2\nu}$.

36. Considérons les permutations circulaires des n premiers nombres, en supposant n pair et égal à 2ν .

Aucune permutation de cette sorte ne peut avoir plus de 2ν séquences. Nous nous proposons d'étudier le nombre de celles qui en ont juste 2ν , c'est-à-dire le nombre $Q_{2\nu, 2\nu}$.

37. Une permutation circulaire des 2ν premiers nombres, qui présente 2ν séquences, présente autant de séquences qu'elle contient d'éléments; autant de séquences, par conséquent, qu'il y a de côtés dans la ligne brisée cylindrique correspondante.

Il s'ensuit que, dans cette ligne brisée, les côtés sont alternativement montants et descendants; en d'autres termes, qu'il ne s'y trouve jamais deux côtés consécutifs tous deux montants ou tous deux descendants.

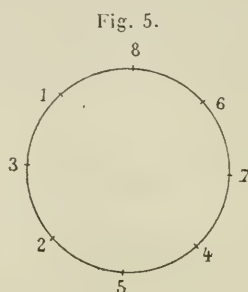
Nous avons appelé *permutations rectilignes alternées* (1) celles dont la ligne brisée a ainsi ses côtés alternativement montants et descendants. Par une extension toute naturelle, nous appellerons les permutations circulaires dont nous nous occupons dans ce paragraphe *permutations circulaires alternées*.

38. Prenons l'une quelconque de ces permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres; supprimons-y le nombre 2ν ; coupons la circonférence au point où était placé ce nombre; puis, en tournant en sens direct, développons suivant une droite l'arc

(1) *Mémoire sur les permutations alternées (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1881).*

qui supporte les $2\gamma - 1$ autres nombres. Nous obtenons ainsi une permutation rectiligne alternée des $2\gamma - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante.

Pour donner un exemple, prenons (*fig. 5*) une permutation



circulaire alternée quelconque des huit premiers nombres; supprimons-y le nombre 8; coupons la circonférence au point où était ce nombre; et, tournant en sens direct, développons, suivant une droite, l'arc qui supporte les sept premiers nombres. Nous obtenons la permutation rectiligne alternée des sept premiers nombres

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 7 \quad 6.$$

qui commence par la séquence montante 13, et finit par la séquence descendante 76.

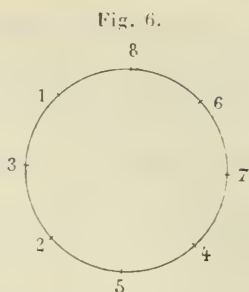
39. Considérons, au contraire, une permutation rectiligne alternée quelconque des $2\gamma - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant, forcément, par une séquence descendante; à sa gauche écrivons le nombre 2γ ; puis enroulons, en tournant en sens direct, la permutation rectiligne ainsi formée autour d'une circonférence. Nous obtenons une permutation circulaire alternée des 2γ premiers nombres.

Pour donner un exemple, considérons la permutation

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 7 \quad 6.$$

qui est une permutation alternée des sept premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante. Opérons sur elle comme nous venons de le

dire : nous obtenons la permutation circulaire alternée (*fig. 6*), qui est une permutation circulaire alternée des huit premiers nombres.



40. Nous voyons que le procédé direct, indiqué d'abord (38), nous permet, étant donnée une permutation circulaire alternée quelconque des 2ν premiers nombres, d'en déduire une permutation rectiligne alternée des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante.

Nous voyons que le procédé inverse, indiqué ensuite (39), nous permet, étant donnée une permutation rectiligne alternée quelconque des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante, d'en déduire une permutation circulaire alternée des 2ν premiers nombres.

Nous voyons de plus, sur nos exemples mêmes, que si deux permutations alternées, l'une circulaire, l'autre rectiligne, sont telles que notre procédé direct permette de passer de la première à la seconde, réciproquement notre procédé inverse permet de revenir de la seconde à la première.

41. Il suit immédiatement de là que les permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres correspondent, chacune à chacune, aux permutations rectilignes alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres, qui commencent par une séquence montante et finissent par une séquence descendante.

Or, il y a évidemment autant de permutations rectilignes alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante, qu'il y a de

permutations rectilignes alternées des mêmes nombres, commençant par une séquence descendante et finissant par une séquence montante.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Le nombre des permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres est juste égal à la moitié du nombre des permutations rectilignes alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres.

42. Dans notre *Mémoire sur le nombre des permutations alternées* ⁽¹⁾, nous avons démontré que le coefficient de $\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$ dans le développement de $\tan x$, suivant les puissances croissantes de x , n'était autre chose que la moitié du nombre des permutations rectilignes alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres. De là ce théorème :

Le nombre $Q_{2\nu, 2\nu}$ des permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres n'est autre chose que le coefficient de $\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$ dans le développement de $\tan x$ suivant les puissances croissantes de x .

43. Cette propriété du nombre des permutations circulaires alternées nous paraît très remarquable. Elle nous rappelle les propriétés analogues que nous avons obtenues, dans le *Mémoire* cité plus haut, pour les nombres des permutations rectilignes alternées. Il y a cependant entre celles-ci et celle-là une différence fort grande. Les nombres des permutations rectilignes alternées figuraient par leurs moitiés, les uns dans le développement de $\tan x$, les autres dans celui de $\sec x$. Les nombres des permutations circulaires alternées ne figurent que dans le premier de ces développements. La raison de cette différence, c'est que, dans les permutations rectilignes alternées, le nombre des éléments de chaque permutation est tantôt pair, tantôt impair, tandis que, dans les permutations circulaires alternées, il y a toujours, forcément, dans chaque permutation, un nombre pair d'éléments.

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1881.

IV. — PROPRIÉTÉS DES NOMBRES $Q_{2\nu-1, 2\nu-2}$.

44. Les permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres sont, parmi les permutations circulaires de ces 2ν éléments, celles qui contiennent le plus grand nombre de séquences.

Parmi les permutations circulaires des $2\nu-1$ premiers nombres, celles qui contiennent le plus grand nombre de séquences sont celles qui en contiennent $2\nu-2$. Ce sont ces dernières que nous considérons maintenant.

45. Ces permutations circulaires des $2\nu-1$ premiers nombres, qui contiennent chacune $2\nu-2$ séquences, ne sont point alternées, puisqu'elles présentent chacune plus d'éléments que de séquences. Mais, comme nous allons le voir, il s'en faut de si peu qu'elles ne soient alternées qu'il nous paraît tout naturel de les nommer *permutations circulaires quasi alternées*, ainsi que nous l'avons fait ⁽¹⁾ pour les permutations rectilignes où le nombre des séquences est inférieur de deux unités au nombre des éléments.

46. Prenons l'une quelconque de ces permutations circulaires quasi alternées, et considérons la ligne brisée cylindrique qui la représente. Comme le nombre des côtés y dépasse d'une unité celui des séquences, il y a forcément, dans cette ligne, une séquence et une seule composée de deux côtés. En d'autres termes, dans cette ligne, il y a forcément un couple et un seul composé de deux côtés consécutifs tous deux montants ou tous deux descendants.

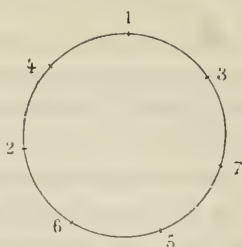
Abandonnant la considération de la ligne brisée cylindrique, on peut dire aussi que, dans toute permutation circulaire quasi alternée des $2\nu-1$ premiers nombres, sur les $2\nu-2$ séquences que cette permutation présente, il y en a $2\nu-3$ composées chacune de deux nombres, et une seule composée de trois.

C'est ce qui arrive dans la permutation circulaire (fig. 7), qui

(1) *Mémoire sur les permutations quasi alternées...*

nous présente sept éléments et six séquences. Les cinq séquences

Fig. 7.



14, 42, 26, 65, 57 sont composées chacune de deux nombres. La séquence 731 est seule composée de trois.

47. Supposons-nous donnée une permutation circulaire quasi alternée des $2v - 1$ premiers nombres. Comme nous venons de le dire (46), elle nous présente une séquence, et une seule, composée de trois nombres. Entre les deux plus petits de ces trois nombres, insérons le nombre $2v$. Nous obtenons évidemment une permutation circulaire des $2v$ premiers nombres, qui a deux séquences de plus que la permutation précédente; qui en a, par conséquent, $2v$; et qui est, par conséquent, alternée.

Pour donner un exemple de cette opération, considérons la permutation circulaire quasi alternée (fig. 8), formée de sept éléments. La séquence seule composée de trois nombres est la sé-

Fig. 8.

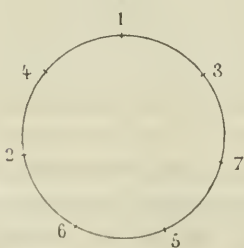
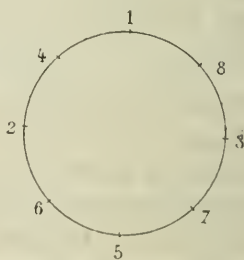


Fig. 9.



quence 731. Si, entre les deux plus petits, 3 et 1, de ces nombres, nous insérons le nombre 8, nous obtenons la nouvelle permutation circulaire (fig. 9), qui est formée de huit éléments, et qui est alternée.

48. Supposons-nous donnée, au contraire, une permutation circulaire alternée quelconque des 2γ premiers nombres; et supprimons-y le nombre 2γ . Nous obtenons une permutation circulaire quasi alternée des $2\gamma - 1$ premiers nombres, dans laquelle la seule séquence composée de trois nombres nous présente toujours, pour les deux plus petits, les deux nombres qui comprenaient entre eux le nombre supprimé 2γ .

Pour donner un exemple de cette opération, qui est l'inverse de celle que nous venons d'indiquer (47), considérons la permutation circulaire alternée des huit premiers nombres (*fig. 10*); et supprimons-y le nombre 8. Nous obtenons la seconde permutation

Fig. 10.

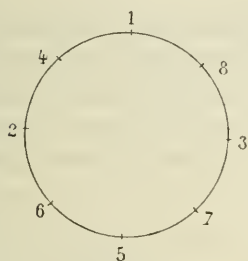
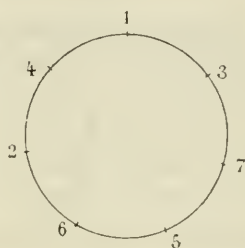


Fig. 11.



circulaire (*fig. 11*), qui est une permutation quasi alternée, formée des sept premiers nombres, et dont la seule séquence composée de trois nombres est la séquence 731 , où les deux nombres les plus petits sont précisément ceux qui, dans la permutation circulaire précédente, comprenaient entre eux le nombre supprimé 8.

49. Nous voyons que le procédé direct, indiqué d'abord (47), nous permet, étant donnée une permutation circulaire quasi alternée quelconque des $2\gamma - 1$ premiers nombres, d'en déduire une permutation circulaire alternée des 2γ premiers nombres.

Nous voyons que le procédé inverse, indiqué ensuite (48), nous permet, étant donnée une permutation circulaire alternée quelconque des 2γ premiers nombres, d'en déduire une permutation circulaire quasi alternée des $2\gamma - 1$ premiers nombres.

Nous voyons de plus, sur nos exemples mêmes, que deux permutations circulaires étant données, l'une quasi alternée et l'autre

alternée, si notre procédé direct permet de passer de la première à la seconde, réciproquement notre procédé inverse permet de revenir de la seconde à la première.

50. Il suit immédiatement de là que les permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres, d'une part, et les permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres, de l'autre, se correspondent chacune à chacune. Ces permutations, par conséquent, sont en nombre égal. Donc :

Il y a autant de permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres qu'il y a de permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres.

51. Si nous nous rappelons la signification du symbole $Q_{n,s}$, nous voyons que le nombre des permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres se représente par $Q_{2\nu-1,2\nu-2}$ et que celui des permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres se représente par $Q_{2\nu,2\nu}$. La proposition précédente (50) peut donc s'énoncer ainsi :

Pour toute valeur de ν égale ou supérieure à 2, on a identiquement

$$Q_{2\nu-1,2\nu-2} = Q_{2\nu,2\nu}.$$

52. Si nous nous rappelons de même le rôle (42) que remplit $Q_{2\nu,2\nu}$ dans le développement de $\tan x$, nous pouvons donner, pour la même proposition encore, ce troisième énoncé :

Le nombre des permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres est juste égal au coefficient de $\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$ dans le développement de $\tan x$ suivant les puissances croissantes de x .

53. Dans notre *Mémoire sur les permutations rectilignes quasi alternées* ⁽¹⁾, considérant, d'une part, le nombre des permutations rectilignes quasi alternées de n éléments, de l'autre, celui des permutations rectilignes alternées de $n + 1$ éléments,

(1) Déjà cité.

nous avons montré que, lorsque n croissait indéfiniment, ces deux nombres étaient deux infiniment grands dont le rapport tendait vers l'unité. C'était là une propriété asymptotique des permutations rectilignes.

L'égalité

$$Q_{2\nu-1, 2\nu-2} = Q_{2\nu, 2\nu},$$

que nous venons d'établir (§1), et qui peut s'écrire

$$\frac{Q_{2\nu-1, 2\nu-2}}{Q_{2\nu, 2\nu}} = 1,$$

nous fait voir que, dans les permutations circulaires, cette propriété n'est plus seulement asymptotique, mais subsiste pour toutes les valeurs finies de ν .

Voilà un deuxième exemple d'une propriété asymptotique des permutations rectilignes qui se transforme en une propriété habituelle des permutations circulaires.

§4. La considération des permutations circulaires quasi alternées met en évidence une différence nouvelle et profonde entre les permutations circulaires et les permutations rectilignes des n premiers nombres.

Que n soit pair ou impair, parmi les permutations rectilignes des n premiers nombres, il y a toujours, à la fois, des permutations alternées et des permutations quasi alternées.

Au contraire, dans les permutations circulaires des n premiers nombres, il n'existe jamais, à la fois, des permutations de ces deux sortes. Lorsque n est pair, il existe des permutations alternées et il n'en existe point de quasi alternées. Et c'est l'inverse lorsque n est impair.

CHAPITRE III.

FORMULE FONDAMENTALE ET TRIANGLE.

I. — FORMULE FONDAMENTALE.

§§. Évidemment, toute permutation circulaire des n premiers nombres peut être regardée comme provenant d'une certaine permutation circulaire des $n - 1$ premiers nombres, où l'on a introduit le nombre n à une certaine place. Nous sommes conduits, par

cette remarque, à chercher comment varie le nombre des séquences d'une permutation circulaire des $n - 1$ premiers nombres lorsque l'on introduit, dans cette permutation, le nombre n à une place quelconque.

§6. Dans une permutation circulaire des $n - 1$ premiers nombres, il existe évidemment $n - 1$ intervalles, c'est-à-dire $n - 1$ places où l'on peut introduire un nombre nouveau.

Ces $n - 1$ places sont de deux sortes, et de deux sortes seulement, savoir :

- 1° Celles qui touchent un maximum ;
- 2° Celles qui n'en touchent aucun.

Il est d'ailleurs bien clair, puisque les maxima alternent avec les minima, qu'il n'y a aucune place touchant deux maxima.

§7. Prenons une permutation circulaire quelconque des $n - 1$ premiers nombres et, dans cette permutation, introduisons le nombre n , d'abord dans une place de la première sorte, ensuite, dans une de la seconde.

Lorsque la place est de la première sorte, c'est-à-dire touche un maximum, le nombre des séquences, par l'introduction de n , n'éprouve aucun changement.

Lorsque la place est de la seconde sorte, c'est-à-dire ne touche aucun maximum, ce nombre augmente de deux unités.

Ces résultats sont à peu près évidents. Ils le deviennent tout à fait si l'on considère la ligne brisée cylindrique correspondant à la permutation.

§8. Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que, dans chacun des deux cas examinés ci-dessus (§7), l'introduction de n fait varier d'un nombre pair le nombre des séquences. Or, dans une permutation circulaire de deux éléments, il y a deux séquences. Donc :

Dans une permutation circulaire quelconque, le nombre des séquences est un nombre pair.

Nous retrouvons ainsi l'un des premiers théorèmes que nous avons démontrés (16).

59. Cette observation faite, demandons-nous quelles sont les permutations circulaires des $n - 1$ premiers nombres qui, par l'introduction de n , donnent des permutations circulaires des n premiers nombres présentant chacune s séquences.

Ces permutations sont évidemment : d'une part, celles qui contiennent déjà s séquences, et où l'on place n à côté d'un maximum; de l'autre, celles qui contiennent seulement $n - 2$ séquences, mais où l'on ne place pas n à côté d'un maximum.

Donc, les permutations circulaires de n éléments, contenant chacune s séquences, peuvent être regardées comme provenant, les unes des permutations circulaires de $n - 1$ éléments qui présentent chacune s séquences, les autres de celles qui en présentent chacune $s - 2$.

60. D'après les notations que nous avons choisies (§20), il y a $Q_{n-1,s}$ permutations circulaires de $n - 1$ éléments, présentant s séquences. Dans chacune d'elles, le nombre des maxima est la moitié de s , et le nombre des places touchant un maximum est par conséquent s . Le nombre des permutations circulaires de n éléments, présentant s séquences, et provenant de ces permutations de $n - 1$ éléments, est donc égal au produit $sQ_{n-1,s}$.

Il y a de même $Q_{n-1,s-2}$ permutations circulaires de $n - 1$ éléments, présentant $s - 2$ séquences. Dans chacune d'elles, le nombre des places touchant un maximum est $s - 2$; le nombre de celles qui n'en touchent aucun est, par suite, $(n - 1) - (s - 2)$, c'est-à-dire $n - s + 1$. Le nombre des permutations circulaires de n éléments, présentant s séquences et provenant de ces nouvelles permutations circulaires de $n - 1$ éléments, est donc égal au produit $(n - s + 1)Q_{n-1,s-2}$.

Nous tirons immédiatement, de ces énumérations, le résultat suivant :

Le nombre total $Q_{n,s}$ des permutations circulaires des n premiers nombres, qui présentent chacune s séquences, est donné par la formule

$$Q_{n,s} = sQ_{n-1,s} + (n - s + 1)Q_{n-1,s-2},$$

où le nombre n est au moins égal à 3.

61. Dans nos premières recherches sur les séquences ⁽¹⁾, nous avons établi, pour les permutations rectilignes, une formule remarquable dont nous nous sommes servis constamment, en la nommant formule fondamentale. La formule que nous venons d'établir ici (60), pour les permutations circulaires, lui est fort analogue, et son importance n'est pas moindre. C'est sur elle que nous allons fonder toute la suite de nos recherches : elle sera la *formule fondamentale* du présent Mémoire. D'ailleurs, cette formule n'est pas nouvelle; nous l'avons donnée, pour la première fois, en 1893 ⁽²⁾, au Congrès des Sociétés savantes.

II. — PREMIÈRES CONSÉQUENCES DE NOTRE FORMULE FONDAMENTALE.

62. Avant d'utiliser notre formule fondamentale (60) pour le calcul des nombres $Q_{n,s}$, nous pouvons en déduire facilement un certain nombre de théorèmes.

63. D'abord il est bien clair, d'après cette formule, que si tous les nombres

$$Q_{n-1,2}, \quad Q_{n-1,4}, \quad Q_{n-1,6}, \dots,$$

qui ont pour premier indice $n-1$, sont pairs, les nombres

$$Q_{n,2}, \quad Q_{n,4}, \quad Q_{n,6}, \dots,$$

qui ont pour premier indice n , sont également pairs.

Or, comme nous l'avons vu (21), $Q_{3,2}$ est égal à 2. Donc :

Pour toutes les valeurs de n supérieures à 2, le nombre $Q_{n,s}$ est un nombre pair.

C'est là un théorème que nous avons déjà énoncé et démontré (27).

64. Reprenons notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = s Q_{n-1,s} + (n - s + 1) Q_{n-1,s-2},$$

⁽¹⁾ *Étude sur les maxima, minima et séquences...* (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 1884).

⁽²⁾ Voir le Journal officiel du 6 avril 1893.

et remplaçons-y s par 2; elle devient

$$Q_{n,2} = 2Q_{n-1,2} + (n-1)Q_{n-1,0}.$$

Or, il est évident que $Q_{n-1,0}$ est nul. Donc nous avons

$$Q_{n,2} = 2Q_{n-1,2};$$

et, puisque $Q_{2,2}$ est égal à l'unité, nous pouvons énoncer cette proposition :

Pour toutes les valeurs possibles de n , on a identiquement

$$Q_{n,2} = 2^{n-2}.$$

C'est là un théorème que nous avons encore, précédemment (33), énoncé et démontré.

65. Reprenons toujours notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = sQ_{n-1,s} + (n-s+1)Q_{n-1,s-2},$$

et remplaçons-y n et s chacun par 2ν . Nous obtenons ce résultat

$$Q_{2\nu,2\nu} = 2\nu Q_{2\nu-1,2\nu} + Q_{2\nu-1,2\nu-2}.$$

Or, il n'existe aucune permutation circulaire contenant plus de séquences qu'elle ne contient d'éléments. Donc $Q_{2\nu-1,2\nu}$ est nul. Donc :

On a identiquement

$$Q_{2\nu-1,2\nu-2} = Q_{2\nu,2\nu}.$$

Et c'est là un troisième théorème que nous avons déjà rencontré et signalé comme très remarquable (31).

66. Les trois théorèmes qui précèdent, et que nous avons déjà démontrés tous les trois d'une manière absolument directe, découlent aussi, on le voit, d'une façon immédiate, de notre formule fondamentale. Ils en constituent en quelque sorte une triple vérification.

III. — TRIANGLE DES SÉQUENCES DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES.

67. Comme nous l'avons dit (60), notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = s Q_{n-1,s} + (n - s + 1) Q_{n-1,s-2}$$

est vraie dès que n égale 3.

Nous avons obtenu auparavant (21) ce résultat très simple

$$Q_{2,2} = 1.$$

Connaissant ce résultat et cette formule, il est clair que nous pouvons calculer de proche en proche tous les nombres $Q_{n,s}$.

68. Nous disposerons ces différents nombres de manière à en former le triangle

$Q_{2,2}$			
$Q_{3,2}$			
$Q_{4,2}$	$Q_{4,4}$		
$Q_{5,2}$	$Q_{5,4}$		
$Q_{6,2}$	$Q_{6,4}$	$Q_{6,6}$	
$Q_{7,2}$	$Q_{7,4}$	$Q_{7,6}$	
$Q_{8,2}$	$Q_{8,4}$	$Q_{8,6}$	$Q_{8,8}$
$Q_{9,2}$	$Q_{9,4}$	$Q_{9,6}$	$Q_{9,8}$
.....			

qui est analogue au triangle de Pascal, et où le nombre $Q_{n,2\sigma}$ se trouve à l'intersection de la colonne de rang σ et de la ligne de rang $n - 1$.

69. Si nous calculons les valeurs numériques de tous les nombres $Q_{n,s}$ dont nous venons d'écrire les symboles, nous obtenons, à la place du triangle littéral précédent, le triangle numérique que voici :

1			
2			
4	2		
8	16		
16	88	16	
32	416	272	
64	1824	2880	272
128	7680	24176	7936
.....			

70. Si l'on considère ce triangle numérique, on constate immédiatement que les trois théorèmes rappelés plus haut (63, 64, 65) y sont tous vérifiés; en d'autres termes, on constate que :

1° A l'exception du premier, tous les éléments du triangle sont des nombres pairs;

2° Les éléments composant la première colonne ne sont autre chose que les puissances successives de 2;

3° Le nombre des permutations circulaires quasi alternées de $2\sigma - 1$ éléments, et le nombre des permutations circulaires alternées de 2σ éléments, sont des nombres égaux.

71. Le triangle que nous venons de donner, d'abord sous forme littérale, ensuite sous forme numérique, est fort analogue au triangle des séquences des permutations rectilignes. Nous l'appellerons le *triangle des séquences des permutations circulaires*; et nous en étudierons d'abord les colonnes, ensuite les lignes, enfin l'ensemble tout entier.

CHAPITRE IV.

COLONNES DU TRIANGLE.

1. — DÉFINITION DES SÉRIES VERTICALES.

72. Les *colonnes verticales*, ou plus simplement les *colonnes* qui composent le triangle des séquences des permutations circulaires, sont caractérisées par le second indice des nombres $Q_{n,s}$ qu'elles contiennent. La première contient les nombres $Q_{n,2}$; la deuxième, les nombres $Q_{n,1}$; la $\sigma^{\text{ième}}$, les nombres $Q_{n,2\sigma}$.

73. Ces mêmes colonnes s'étendent indéfiniment vers le bas. Le terme placé en haut, c'est-à-dire le premier terme de chacune d'elles, est $Q_{2,2}$ pour la première, $Q_{1,1}$ pour la deuxième, $Q_{2\sigma,2\sigma}$ pour la $\sigma^{\text{ième}}$.

Nous avons d'ailleurs étudié déjà le premier et le second terme de chaque colonne, c'est-à-dire le terme $Q_{2\sigma,2\sigma}$, qui est le nombre des permutations circulaires alternées de 2σ éléments, et le terme $Q_{2\sigma+1,2\sigma}$, qui est le nombre des permutations circulaires quasi alternées de $2\sigma + 1$ éléments.

74. Les nombres qui composent la colonne de rang σ sont, de haut en bas,

$$Q_{2\sigma, 2\sigma}, \quad Q_{2\sigma+1, 2\sigma}, \quad Q_{2\sigma+2, 2\sigma}, \quad Q_{2\sigma+3, 2\sigma}, \dots$$

Ces nombres croissent au delà de toute limite. On voit, en effet, sur notre formule fondamentale (60), que, dans la colonne de rang σ , chaque terme est supérieur à celui qui le précède immédiatement, multiplié par 2σ .

75. Nous relierons ces nombres les uns aux autres à l'aide de la série entière

$$Q_{2\sigma, 2\sigma} + Q_{2\sigma+1, 2\sigma} z + Q_{2\sigma+2, 2\sigma} z^2 + Q_{2\sigma+3, 2\sigma} z^3 + \dots$$

où z représente une variable indépendante; et nous appelons cette série la *série verticale correspondant à la colonne de rang σ* , ou plus simplement la *série verticale de rang σ* .

II. — CONVERGENCE DES SÉRIES VERTICALES.

76. Nous avons trouvé précédemment (33)

$$Q_{n, 2} = 2^{n-2}.$$

Il résulte de là que, dans la première de nos séries verticales, le terme général est $2^{n-2} z^{n-2}$; par suite, que cette première série est une progression géométrique de raison $2z$; par suite, enfin, que cette série est convergente toutes les fois que z , en valeur absolue, est inférieur à $\frac{1}{2}$.

77. Ainsi, la série verticale de rang 1 est convergente toutes les fois que z , en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2. Nous allons montrer que la série verticale de rang σ est convergente toutes les fois que z , en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2σ .

Nous prouverons pour cela que, si cette propriété est vraie pour la série de rang $\sigma - 1$, elle l'est aussi forcément pour la série de rang σ .

78. Reprenons notre formule fondamentale

$$Q_{n, s} = s Q_{n-1, s} + (n - s + 1) Q_{n-1, s-2},$$

Quant à la quantité entre crochets :

$$2s^{t-1}Q_{s,s-2} + 3s^{t-2}Q_{s+1,s-2} + 4s^{t-3}Q_{s+2,s-2} + \dots + (t+1)Q_{s+t-1,s-2},$$

elle est le coefficient de z^t dans le produit de la série

$$1 + sz + s^2 z^2 + s^3 z^3 + \dots$$

par la série

$$2Q_{s,s-2}z + 3Q_{s+1,s-2}z^2 + 4Q_{s+2,s-2}z^3 + \dots$$

Or, celle-ci est juste égale à la dérivée $W'_{\sigma-1}$, diminuée de $Q_{s-1,s-2}$. Donc cette dernière partie n'est autre chose que le coefficient de z^t dans le développement de

$$\frac{1}{1-sz}(W'_{\sigma-1} - Q_{s-1,s-2})$$

lequel est encore convergent toutes les fois que z , en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de s , c'est-à-dire à l'inverse de 2σ .

81. Il suit de tout cela que le coefficient de z^t , dans la série verticale de rang σ , est égal au coefficient de z^t dans le développement de

$$\frac{1}{1-sz}Q_{s,s} + \frac{1}{1-sz}(W'_{\sigma-1} - Q_{s-1,s-2}).$$

Or, d'après ce que nous avons vu précédemment (§1),

$$Q_{s,s} - Q_{s-1,s-2} = 0.$$

Donc $Q_{s+t,s}$ n'est autre chose que le coefficient de z^t dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{1-sz}W'_{\sigma-1},$$

c'est-à-dire dans un développement qui est convergent toutes les fois que z , en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2σ .

Mais $Q_{s+t,s}$ est le coefficient de z^t dans le développement de la série verticale de rang σ . Donc, finalement :

Une série verticale de rang quelconque σ est convergente toutes les fois que z , en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2σ .

82. Ce résultat est tout à fait analogue à celui que nous avons trouvé autrefois ⁽¹⁾, pour la convergence des séries verticales, dans le triangle des séquences des permutations rectilignes.

L'analogie se transforme même en identité, si l'on considère, non plus le rang σ de la colonne, mais le second indice 2σ , c'est-à-dire s , de chacun des termes $Q_{n,s}$ qui la composent.

III. — FONCTIONS GÉNÉRATRICES DES COLONNES.

83. Comme nous venons de le voir (81), la série verticale de rang σ est toujours convergente pour les valeurs absolues, suffisamment petites, de la variable z .

Représentons toujours par W_σ la fonction de z qui en est la somme. Cette fonction W_σ sera, suivant l'expression consacrée, la *fonction génératrice* des coefficients de cette série, c'est-à-dire la fonction génératrice des nombres

$$Q_{2\sigma, 2\sigma}, \quad Q_{2\sigma+1, 2\sigma}, \quad Q_{2\sigma+2, 2\sigma}, \quad \dots,$$

qui composent la colonne de rang σ . Pour abrégér, nous la nommerons simplement la *fonction génératrice* de la colonne de rang σ .

84. D'après ce que nous venons de voir (81), la série verticale de rang σ se confond avec le développement de

$$\frac{1}{1-sz} W'_{\sigma-1},$$

où s est le double de σ . Nous avons donc identiquement

$$W_\sigma = \frac{1}{1-2\sigma z} W'_{\sigma-1}.$$

Telle est l'équation *aux différences mêlées*, qui relie entre elles deux consécutives quelconques de nos fonctions génératrices. S'il était permis de faire abstraction de la convergence des séries, on pourrait déduire cette équation, sans aucun calcul, de notre formule fondamentale; on pourrait dire qu'elle n'en est qu'une conséquence évidente.

(1) *Mémoire sur le triangle des séquences...*

85. Considérons la première colonne du triangle des séquences des permutations circulaires. Ses termes sont

$$1, \quad 2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4, \quad \dots$$

La série correspondante est

$$1 + 2z + 2^2 z^2 + 2^3 z^3 + 2^4 z^4 + \dots,$$

c'est-à-dire la progression géométrique ayant pour premier terme 1 et pour raison $2z$. Sa fonction génératrice nous est donc donnée par la formule

$$W_1 = \frac{1}{1 - 2z}.$$

De là, nous déduisons immédiatement, à l'aide de la formule (84) qui précède :

$$W_2 = \frac{2}{(1 - 2z)^2(1 - 4z)},$$

$$W_3 = \frac{16(1 - 3z)}{(1 - 2z)^3(1 - 4z)^2(1 - 6z)},$$

$$W_4 = \frac{16(17 - 184z + 636z^2 - 720z^3)}{(1 - 2z)^4(1 - 4z)^3(1 - 6z)^2(1 - 8z)},$$

et ainsi de suite.

86. Les quatre expressions, que nous venons de trouver pour W_1, W_2, W_3, W_4 , sont quatre fractions rationnelles. La formule (84)

$$W_\sigma = \frac{1}{1 - 2\sigma z} W'_{\sigma-1}$$

nous montre que, si $W'_{\sigma-1}$ est une fraction rationnelle, W_σ en est une aussi. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

La fonction génératrice de chaque colonne du triangle est une fraction rationnelle, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes entiers en z .

87. D'après ce qui précède (86), nous pouvons dire à volonté que W_σ est la fonction génératrice ou la fraction génératrice de la colonne de rang σ .

Nous pouvons aussi poser

$$W_\sigma = \frac{A_\sigma}{B_\sigma},$$

A_σ et B_σ désignant deux polynômes entiers en z .

Quant à ces deux polynômes, c'est-à-dire aux deux termes de la fraction génératrice, nous allons les étudier l'un après l'autre, en commençant par le dénominateur B_{σ} .

IV. — DÉNOMINATEUR DE W_{σ} .

88. Si nous nous reportons aux expressions de W_1, W_2, W_3, W_4 , que nous avons obtenues précédemment (83), nous en déduisons aussitôt, pour les dénominateurs B_1, B_2, B_3, B_4 , les expressions suivantes :

$$B_1 = (1 - 2z),$$

$$B_2 = (1 - 2z)^2 (1 - 4z),$$

$$B_3 = (1 - 2z)^3 (1 - 4z)^2 (1 - 6z),$$

$$B_4 = (1 - 2z)^4 (1 - 4z)^3 (1 - 6z)^2 (1 - 8z),$$

qui nous donnent une première idée de la composition générale du dénominateur B_{σ} ,

89. Bien que ces expressions de B_1, B_2, B_3, B_4 soient assez simples, nous les modifierons en posant

$$F_2 = (1 - 2z),$$

$$F_4 = (1 - 2z)(1 - 4z),$$

$$F_6 = (1 - 2z)(1 - 4z)(1 - 6z),$$

$$F_8 = (1 - 2z)(1 - 4z)(1 - 6z)(1 - 8z);$$

et ainsi de suite.

Nous aurons alors

$$B_1 = F_2,$$

$$B_2 = F_2 F_4,$$

$$B_3 = F_2 F_4 F_6,$$

$$B_4 = F_2 F_4 F_6 F_8.$$

Par rapport aux facteurs linéaires en z , dont elles sont le produit, les quantités F sont de véritables *factorielles*. Par rapport à leurs facteurs F , les premiers dénominateurs B sont des *factorielles* aussi : ce sont des *factorielles de factorielles*.

90. Rappelons-nous la relation

$$W_{\sigma} = \frac{1}{1 - 2\sigma z} W'_{\sigma-1}.$$

et supposons que l'on ait

$$B_{\sigma-1} = F_2 F_4 F_6 \dots F_{2\sigma-2}.$$

Nous avons alors

$$W_{\sigma-1} = \frac{\Lambda_{\sigma-1}}{B_{\sigma-1}} = \frac{\Lambda_{\sigma-1}}{F_2 F_4 F_6 \dots F_{2\sigma-2}}.$$

La règle pour calculer la dérivée d'un quotient nous donne d'ailleurs

$$W'_{\sigma-1} = \frac{B_{\sigma-1} \Lambda'_{\sigma-1} - \Lambda_{\sigma-1} B'_{\sigma-1}}{B_{\sigma-1}^2}.$$

Or, $B'_{\sigma-1}$ admet tous les facteurs du premier degré en z qui figurent dans $B_{\sigma-1}$ avec des exposants moindres chacun d'une unité. Donc $B'_{\sigma-1}$ est divisible par $B_{\sigma-2}$ qui est justement le produit de tous ces facteurs, affectés des exposants ainsi diminués. Les deux termes de $W'_{\sigma-1}$ sont donc divisibles par ce produit. En effectuant ces divisions et remarquant que le nouveau numérateur n'est autre chose que Λ_{σ} , nous trouvons ce résultat très simplifié

$$W'_{\sigma-1} = \frac{\Lambda_{\sigma}}{B_{\sigma-1} F_{2\sigma-2}}.$$

Portons cette expression de $W'_{\sigma-1}$ dans l'égalité qui nous donne W_{σ} ; il nous vient

$$W_{\sigma} = \frac{\Lambda_{\sigma}}{(1 - 2\sigma z) B_{\sigma-1} F_{2\sigma-2}}.$$

Or,

$$(1 - 2\sigma z) F_{2\sigma-2} = F_{2\sigma}.$$

Donc

$$W_{\sigma} = \frac{\Lambda_{\sigma}}{B_{\sigma-1} F_{2\sigma}};$$

et, par conséquent,

$$B_{\sigma} = F_2 F_4 F_6 \dots F_{2\sigma}.$$

91. Ainsi l'expression que nous avons trouvée (89) pour les quatre dénominateurs B_1, B_2, B_3, B_4 subsiste pour B_{σ} dès qu'elle est vraie pour $B_{\sigma-1}$. Donc, cette expression est générale, et nous pouvons énoncer ce théorème :

Si l'on pose

$$F_{2t} = (1 - 2z)(1 - 4z)(1 - 6z) \dots (1 - 2tz),$$

on a identiquement

$$B_{\sigma} = F_2 F_4 F_6 \dots F_{2\sigma},$$

pour l'expression du dénominateur B_{σ} de la fraction génératrice W_{σ} .

On peut remarquer, d'ailleurs, que cette expression de B_{σ} est toujours une factorielle de factorielles.

92. Pour obtenir le degré β_{σ} du dénominateur B_{σ} , il suffit de considérer l'expression de B_{σ} que l'on vient de trouver (91), et de remarquer que F_{2t} est toujours du degré t . On voit immédiatement alors que le degré de B_{σ} est égal à la somme des σ premiers nombres. On a donc

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma(\sigma+1)}{2}.$$

Tel est le degré cherché.

93. Quant au coefficient du dernier terme dans le développement de B_{σ} suivant les puissances ascendantes de z , c'est évidemment le produit des coefficients des termes du degré le plus élevé dans chacun des facteurs

$$F_2, F_4, F_6, \dots, F_{2\sigma}.$$

Or, dans F_{2t} , ce coefficient est évidemment

$$(-1)^t 2.4.6 \dots (2t).$$

Si donc nous posons d'une façon générale

$$2.4.6 \dots (2t) = 1_{2t},$$

et que nous désignons par b_{σ} le dernier coefficient de B_{σ} , nous avons identiquement

$$b_{\sigma} = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} 1_2 1_4 1_6 \dots 1_{2\sigma}.$$

Telle est l'expression du dernier coefficient. C'est encore, nous le voyons, une factorielle de factorielles.

94. Tous ces résultats, de même que la plupart de ceux qui vont suivre, sont encore, sinon identiques, du moins fort analogues à ceux que nous avons donnés, pour les permutations rectilignes, dans notre *Mémoire sur le triangle des séquences*.

V. — NUMÉRATEUR DE W_σ .

95. Nous ne chercherons point la composition du numérateur A_σ de la fraction génératrice W_σ . Supposant ce numérateur ordonné suivant les puissances croissantes de z , nous nous bornerons à en calculer le degré et le dernier coefficient.

Nous prendrons, d'ailleurs, pour point de départ de ces deux calculs, la formule

$$A_\sigma = \frac{B_{\sigma-1} A'_{\sigma-1} - A_{\sigma-1} B'_{\sigma-1}}{B_{\sigma-2}},$$

que nous avons établie (90) précédemment.

96. Si nous désignons par α_σ le degré du numérateur A_σ et continuons de désigner par β_σ celui du dénominateur B_σ , la formule que nous venons de rappeler (95) nous donne immédiatement l'égalité

$$\alpha_\sigma = \beta_{\sigma-1} + \alpha_{\sigma-1} - 1 - \beta_{\sigma-2},$$

qui peut s'écrire

$$\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma-1} = (\beta_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-2}) - 1.$$

Nous tirons de là les $\sigma - 2$ équations

$$\begin{aligned} \alpha_3 - \alpha_2 &= (\beta_2 - \beta_1) - 1, \\ \alpha_4 - \alpha_3 &= (\beta_3 - \beta_2) - 1, \\ \alpha_5 - \alpha_4 &= (\beta_4 - \beta_3) - 1, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{\sigma-1} - \alpha_{\sigma-2} &= (\beta_{\sigma-2} - \beta_{\sigma-3}) - 1, \\ \alpha_\sigma - \alpha_{\sigma-1} &= (\beta_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-2}) - 1, \end{aligned}$$

que nous ajoutons membres à membres.

Par cette addition, nous trouvons finalement

$$\alpha_\sigma - \alpha_2 = (\beta_{\sigma-1} - \beta_1) - (\sigma - 2).$$

Or, comme nous l'avons vu (85, 92),

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_{\sigma-1} = \frac{(\sigma-1)\sigma}{2}.$$

Donc

$$\alpha_\sigma = \frac{(\sigma-1)\sigma}{2} - 1 - (\sigma-2),$$

c'est-à-dire

$$\alpha_{\sigma} = \frac{(\sigma-2)(\sigma-1)}{2}.$$

Tel est le degré cherché.

97. On peut remarquer que cette formule nous donne immédiatement l'identité

$$\alpha_{\sigma} = \beta_{\sigma-2};$$

et que cette identité à son tour nous conduit à la relation

$$\alpha_{\sigma} = \beta_{\sigma} - (2\sigma - 1).$$

98. Supposons toujours le numérateur Λ_{σ} ordonné suivant les puissances croissantes de z , et cherchons le dernier coefficient a_{σ} de ce numérateur.

Pour l'obtenir, reprenons encore la formule

$$\Lambda_{\sigma} = \frac{B_{\sigma-1} \Lambda'_{\sigma-1} - \Lambda_{\sigma-1} B'_{\sigma-1}}{B_{\sigma-2}},$$

et remarquons que les polynômes

$$B_{\sigma-1}, \quad \Lambda'_{\sigma-1}, \quad \Lambda_{\sigma-1}, \quad B'_{\sigma-1}, \quad B_{\sigma-2},$$

qui figurent à son second membre, ont pour derniers coefficients respectifs

$$b_{\sigma-1}, \quad \alpha_{\sigma-1} a_{\sigma-1}, \quad a_{\sigma-1}, \quad \beta_{\sigma-1} b_{\sigma-1}, \quad b_{\sigma-2}.$$

Remplaçant, dans ce second membre, ces polynômes par ces coefficients, nous trouvons, après réduction,

$$a_{\sigma} = (\alpha_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-1}) a_{\sigma-1} \frac{b_{\sigma-1}}{b_{\sigma-2}}.$$

Or, comme nous l'avons vu (97, 93),

$$\alpha_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-1} = -(2\sigma - 3),$$

$$b_{\sigma-1} = (-1)^{\frac{(\sigma-1)\sigma}{2}} I_2 I_4 I_6 \dots I_{2\sigma-2},$$

$$b_{\sigma-2} = (-1)^{\frac{(\sigma-2)(\sigma-1)}{2}} I_2 I_4 I_6 \dots I_{2\sigma-4}.$$

Donc

$$a_{\sigma} = (-1)^{\sigma} (2\sigma - 3) I_{2\sigma-2} a_{\sigma-1}.$$

C'est là une formule de récurrence qui va nous permettre de calculer a_σ en fonction même de σ .

99. Elle nous donne immédiatement les $\sigma - 1$ égalités

$$\begin{aligned} a_2 &= (-1)^2 \cdot 1 \cdot 1_2 a_1, \\ a_3 &= (-1)^3 \cdot 3 \cdot 1_3 a_2, \\ a_4 &= (-1)^4 \cdot 5 \cdot 1_4 a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ a_\sigma &= (-1)^\sigma (2\sigma - 3) \cdot 1_{2\sigma-2} a_{\sigma-1}. \end{aligned}$$

Multiplions toutes ces égalités membres à membres et simplifions, en nous rappelant que a_1 est (88) égal à l'unité. Nous trouvons

$$a_\sigma = (-1)^{\frac{\sigma \cdot \sigma + 1}{2} - 1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\sigma - 3) \cdot 1_2 \cdot 1_4 \cdot 1_6 \dots 1_{2\sigma-2}.$$

Telle est l'expression de a_σ en fonction de σ . C'est encore une factorielle de factorielles.

100. On voit que cette expression de a_σ est un peu plus compliquée que celle de b_σ . Il existe entre les deux une relation simple. Considérons, en effet, l'expression de a_σ que nous venons de trouver (99) et l'expression de b_σ que nous avons trouvée (93) autrefois. En divisant la première par la seconde et simplifiant, nous trouvons

$$\frac{a_\sigma}{b_\sigma} = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\sigma - 3) \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2\sigma - 2) \cdot 2\sigma},$$

et cette relation nous paraît assez remarquable.

VI. — PROPRIÉTÉS DES TERMES DE LA COLONNE σ .

101. Dans ses études sur le développement, suivant les puissances ascendantes de la variable, d'une fraction rationnelle quelconque, Moivre a montré ⁽¹⁾ que les coefficients de ce développement forment une série récurrente proprement dite, d'un ordre égal au degré du dénominateur de la fraction développée.

Nous avons vu que les termes composant la colonne de rang σ sont les coefficients du développement de la fraction rationnelle

⁽¹⁾ *Miscellanea analytica*.

W_σ , dont le dénominateur est d'un degré égal à β_σ , c'est-à-dire à $\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$.

De là cette proposition :

Les nombres composant la colonne de rang σ forment une série récurrente proprement dite, et l'ordre de cette série est égal à $\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$.

102. On appelle équation génératrice d'une série récurrente proprement dite la transformée en $\frac{1}{z}$ de l'équation qu'on obtiendrait en égalant à zéro le polynôme entier en z qui forme le dénominateur de la fraction génératrice. Il nous suffira donc, pour écrire cette équation génératrice, de nous rappeler la composition du dénominateur B_σ de la fraction W_σ .

Nous arrivons ainsi à ce théorème :

Si l'on pose, d'une façon générale,

$$G_{2t} = (z-2)(z-4)(z-6)\dots(z-2t),$$

la série récurrente formée par les termes composant la colonne de rang σ a pour équation génératrice l'équation

$$G_2 G_4 G_6 \dots G_{2\sigma} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est du degré $\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$. Il est encore, d'ailleurs, une factorielle de factorielles.

103. Dire que les termes de la colonne σ forment une série récurrente proprement dite d'ordre β_σ , c'est dire qu'il existe, entre $\beta_\sigma + 1$ termes consécutifs quelconques de cette colonne, une relation linéaire, homogène, à coefficients constants. C'est cette relation qu'on appelle l'échelle de récurrence de la série. Nous pouvons l'écrire facilement, car elle présente, comme on le sait, les mêmes coefficients que l'équation génératrice, et que cette équation (102) nous est déjà connue.

Supposons, par exemple, qu'on nous demande l'échelle de récurrence de la troisième colonne. L'équation génératrice des

termes de cette colonne est

$$G_2 G_4 G_6 = 0,$$

ou bien

$$(z - 2)^3(z - 4)^2(z - 6) = 0,$$

ou bien enfin

$$z^6 - 20z^5 + 160z^4 - 656z^3 + 1456z^2 - 1664z + 768 = 0.$$

D'après ce qui précède, l'échelle de récurrence sera

$$Q_{n,6} - 20 Q_{n-1,6} + 160 Q_{n-2,6} - 656 Q_{n-3,6} \\ + 1456 Q_{n-4,6} - 1664 Q_{n-5,6} + 768 Q_{n-6,6} = 0.$$

104. Depuis les travaux d'Euler et de Lagrange sur les séries récurrentes, on sait que, si l'on désigne par u_n le terme général d'une telle série, par r une racine quelconque de son équation génératrice et par p le degré de multiplicité de cette racine, on a identiquement

$$u_n = \sum \zeta_r \cdot r^n,$$

ζ_r désignant un polynôme entier en n , du degré $p - 1$, et le signe Σ s'étendant à toutes les racines distinctes de l'équation génératrice.

En remarquant que l'équation génératrice correspondant à la colonne de rang τ peut s'écrire

$$\prod_{t=1}^{\tau} (z - 2t)^{\tau+1-t} = 0$$

et en nous servant de la formule que nous venons de rappeler pour u_n , nous arrivons à cette proposition :

Le terme général $Q_{n,2\sigma}$ de la colonne de rang τ est donné par la formule

$$Q_{n,2\sigma} = \sum_{t=1}^{\sigma} \zeta_{2t} \cdot (2t)^n,$$

dans laquelle ζ_{2t} désigne un polynôme entier en n , du degré $\tau - t$.

105. Les valeurs particulières les plus simples que donne cette formule sont évidemment celles où τ est égal à 1 ou à 2. On

trouve alors

$$Q_{n,2} = \frac{1}{7} \cdot 2^n,$$

$$Q_{n,3} = \left(\frac{1}{8} - \frac{n}{8} \right) 2^n + \frac{1}{32} \cdot 4^n,$$

l'indice n ne pouvant être inférieur à 2 dans la première égalité, ni à 4 dans la seconde.

106. L'expression que nous venons de donner (104) pour $Q_{n,2}$ et, plus généralement, toutes les propositions qui précèdent sur les colonnes verticales du triangle des séquences des permutations circulaires sont, on le voit, fort analogues à celles que nous avons données antrefois pour les colonnes verticales du triangle des séquences des permutations rectilignes. Mais elles sont toutes plus simples et s'obtiennent plus facilement. C'est là une particularité que nous avons signalée en commençant (4), et qui tient à la grande simplicité de notre formule fondamentale (60), ou plutôt, en dernière analyse, à la parfaite régularité des permutations circulaires.

CHAPITRE V.

LIGNES DU TRIANGLE.

I. — DÉFINITION DES POLYNÔMES HORIZONTAUX.

107. Les *lignes horizontales*, ou plus simplement les *lignes* qui composent le triangle des séquences des permutations circulaires, sont caractérisées par le premier indice des nombres $Q_{n,s}$ qu'elles contiennent. Mais ce premier indice n'est point égal au rang de la ligne : lorsqu'il est n , le rang est seulement $n - 1$.

Afin d'abrégé et de simplifier le langage, nous désignerons dorénavant chaque ligne, non point par le rang qu'elle occupe, mais par le premier indice des nombres qui la composent. La ligne d'indice n sera donc celle dont tous les termes ont n pour premier indice.

108. Ces lignes horizontales du triangle ont toutes une étendue limitée. Le nombre des termes de la ligne n est égal à ν , cette lettre ν désignant la partie entière de la moitié de n .

109. D'après ce que nous avons vu (64), le premier terme de la ligne d'indice n est toujours égal à 2^{n-2} .

Le dernier terme de la même ligne est $Q_{n,2\nu}$. C'est un nombre de permutations circulaires alternées lorsque n est pair; quasi alternées lorsque n est impair.

110. Il est d'ailleurs évident que la somme de tous les termes de la ligne d'indice n est égale au nombre total des permutations circulaires de n objets distincts, c'est-à-dire au produit des $n - 1$ premiers nombres.

111. Les nombres qui composent la ligne d'indice n sont, de gauche à droite,

$$Q_{n,2}, Q_{n,4}, Q_{n,6}, \dots, Q_{n,2\nu},$$

ν désignant toujours la partie entière de la moitié de n .

Pour découvrir les propriétés particulières de ces nombres, et étudier plus tard le triangle entier des séquences des permutations circulaires, nous relierons entre eux les nombres qui composent la ligne d'indice n , en les regardant comme les coefficients d'un même polynôme. Ce polynôme, que nous désignons par $K_n(x)$, ou plus simplement par K_n , est défini par l'égalité

$$K_n(x) = Q_{n,2} + Q_{n,4}x + Q_{n,6}x^2 + \dots + Q_{n,2\nu}x^{\nu-1}.$$

Nous l'appelons le *polynôme horizontal correspondant à la ligne d'indice n* , ou plus simplement le *polynôme d'indice n* .

Il est évident, de plus, que ce polynôme n'existe que pour n supérieur à 1, et qu'il est toujours du degré $\nu - 1$.

II. — RELATION ENTRE DEUX POLYNÔMES HORIZONTAUX CONSÉCUTIFS.

112. Pour obtenir une relation entre deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques, nous partirons de notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = sQ_{n-1,s} + (n - s + 1)Q_{n-1,s-2},$$

que nous écrirons ainsi

$$Q_{n,s} = sQ_{n-1,s} - sQ_{n-1,s-2} + (n + 1)Q_{n-1,s-2};$$

et nous distinguerons deux cas, selon que n sera pair ou impair.

113. Supposons, en premier lieu, n pair et égal à 2γ ; écrivons ces γ égalités

$$\begin{aligned} Q_{2\gamma,2} &= 2 Q_{2\gamma-1,2}, \\ Q_{2\gamma,4} &= 4 Q_{2\gamma-1,4} - 4 Q_{2\gamma-1,2} + (2\gamma+1) Q_{2\gamma-1,2}, \\ Q_{2\gamma,6} &= 6 Q_{2\gamma-1,6} - 6 Q_{2\gamma-1,4} + (2\gamma+1) Q_{2\gamma-1,4}, \\ Q_{2\gamma,8} &= 8 Q_{2\gamma-1,8} - 8 Q_{2\gamma-1,6} + (2\gamma+1) Q_{2\gamma-1,6}, \\ &\dots\dots\dots \\ Q_{2\gamma,2\gamma} &= \dots\dots\dots - 2\gamma Q_{2\gamma-1,2\gamma-2} + (2\gamma+1) Q_{2\gamma-1,2\gamma-2}, \end{aligned}$$

qui découlent toutes de notre formule fondamentale; puis multiplions la première d'entre elles par 1, la deuxième par x , la troisième par x^2 , ..., la dernière par $x^{\gamma-1}$.

Si nous ajoutons membres à membres, par colonnes, toutes ces égalités ainsi multipliées, nous trouvons un résultat pour les premiers membres, et trois pour les seconds.

Le résultat de l'addition des premiers membres est

$$Q_{2\gamma,2} + Q_{2\gamma,4} x + Q_{2\gamma,6} x^2 + \dots + Q_{2\gamma,2\gamma} x^{\gamma-1},$$

c'est-à-dire le polynôme $K_{2\gamma}$.

Les trois résultats de l'addition, par colonnes, des seconds membres sont

$$\begin{aligned} &2[Q_{2\gamma-1,2} + 2Q_{2\gamma-1,4}x + 3Q_{2\gamma-1,6}x^2 + \dots + (\gamma-1)Q_{2\gamma-1,2\gamma-2}x^{\gamma-2}], \\ &-2[2Q_{2\gamma-1,2}x + 3Q_{2\gamma-1,4}x^2 + 4Q_{2\gamma-1,6}x^3 + \dots + \gamma Q_{2\gamma-1,2\gamma-2}x^{\gamma-1}], \\ &(2\gamma+1)x[Q_{2\gamma-1,2} + Q_{2\gamma-1,4}x + Q_{2\gamma-1,6}x^2 + \dots + Q_{2\gamma-1,2\gamma-2}x^{\gamma-2}]; \end{aligned}$$

ils ont pour sommes respectives

$$2 \frac{d(xK_{2\gamma-1})}{dx}, \quad -2 \frac{d(x^2K_{2\gamma-1})}{dx}, \quad (2\gamma+1)xK_{2\gamma-1}.$$

Il s'ensuit immédiatement cette relation

$$K_{2\gamma} = 2 \frac{d}{dx} [(x-x^2)K_{2\gamma-1}] + (2\gamma+1)xK_{2\gamma-1},$$

entre les deux polynômes horizontaux consécutifs $K_{2\gamma}$ et $K_{2\gamma-1}$.

114. Supposons, en second lieu, n impair et égal à $2\gamma+1$:

écrivons ces $\nu + 1$ égalités

$$\begin{aligned} Q_{2\nu+1,2} &= 2 \quad Q_{2\nu,2}, \\ Q_{2\nu+1,4} &= 1 \quad Q_{2\nu,4} - 1 \quad Q_{2\nu,2} + (2\nu + 2) Q_{2\nu,2}, \\ Q_{2\nu+1,6} &= 6 \quad Q_{2\nu,6} - 6 \quad Q_{2\nu,4} + (2\nu + 2) Q_{2\nu,4}, \\ &\dots\dots\dots \\ Q_{2\nu+1,2\nu} &= 2\nu Q_{2\nu,2\nu} - 2\nu Q_{2\nu,2\nu-2} + (2\nu + 2) Q_{2\nu,2\nu-2}, \\ 0 &= \dots\dots\dots - (2\nu + 2) Q_{2\nu,2\nu} + (2\nu + 2) Q_{2\nu,2\nu}, \end{aligned}$$

dont les ν premières résultent de notre formule fondamentale, et dont la dernière est évidente; puis multiplions la première d'entre elles par 1, la deuxième par x , la troisième par x^2 , ..., la dernière par x^ν .

Si nous ajoutons membres à membres, par colonnes, toutes ces égalités ainsi multipliées, nous trouvons un résultat pour les premiers membres, et trois pour les seconds.

Le résultat de l'addition des premiers membres est

$$Q_{2\nu+1,2} + Q_{2\nu+1,4}x + Q_{2\nu+1,6}x^2 + \dots + Q_{2\nu+1,2\nu}x^{\nu-1},$$

c'est-à-dire le polynôme $K_{2\nu+1}$.

Les trois résultats de l'addition, par colonnes, des seconds membres sont

$$\begin{aligned} &2[\quad Q_{2\nu,2} + 2Q_{2\nu,4}x + 3Q_{2\nu,6}x^2 + \dots + \quad \nu Q_{2\nu,2\nu}x^{\nu-1}], \\ &- 2[2Q_{2\nu,2}x + 3Q_{2\nu,4}x^2 + 1Q_{2\nu,6}x^3 + \dots + (\nu + 1)Q_{2\nu,2\nu}x^\nu], \\ &(2\nu + 2)x[\quad Q_{2\nu,2} + \quad Q_{2\nu,4}x + \quad Q_{2\nu,6}x^2 + \dots + \quad Q_{2\nu,2\nu}x^{\nu-1}]; \end{aligned}$$

ils ont pour sommes respectives

$$2 \frac{d(xK_{2\nu})}{dx}, \quad -2 \frac{d(x^2K_{2\nu})}{dx}, \quad (2\nu + 2)xK_{2\nu}.$$

Il s'ensuit immédiatement cette relation

$$K_{2\nu+1} = 2 \frac{d}{dx} [(x - x^2)K_{2\nu}] + (2\nu + 2)xK_{2\nu}$$

entre les deux polynômes horizontaux consécutifs $K_{2\nu+1}$ et $K_{2\nu}$.

115. Récrivons les deux égalités

$$\begin{aligned} K_{2\nu} &= 2 \frac{d}{dx} [(x - x^2)K_{2\nu-1}] + (2\nu + 1)xK_{2\nu-1}, \\ K_{2\nu+1} &= 2 \frac{d}{dx} [(x - x^2)K_{2\nu}] + (2\nu + 2)xK_{2\nu}. \end{aligned}$$

que nous venons d'obtenir. Nous avons établi la première (113), en supposant n égal à 2γ ; la seconde (114), en supposant n égal à $2\gamma + 1$. Réciproquement, si nous remplaçons 2γ dans la première par n , dans la seconde par $n - 1$, nous obtenons la formule unique

$$K_n = 2 \frac{d}{dx} [(x - x^2) K_{n-1}] + (n + 1)x K_{n-1};$$

et si, dans cette formule unique, nous effectuons la différentiation indiquée, nous arrivons à ce théorème :

Deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques sont toujours reliés entre eux par l'équation

$$K_n = [2 + (n - 3)x] K_{n-1} + 2(x - x^2) K'_{n-1},$$

dans laquelle K'_{n-1} désigne la dérivée, par rapport à x , du polynôme K_{n-1} .

416. L'équation aux différences mêlées que nous venons d'établir, et qui relie entre eux deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques, est, dans l'étude de ces polynômes, la relation la plus importante. Parmi les nombreuses conséquences qu'elle entraîne, il en est deux qu'on peut obtenir immédiatement. Ce sont celles qu'on en tire en y remplaçant x par 0, puis par 1, c'est-à-dire par les deux racines du binôme $x - x^2$, qui multiplie la dérivée K'_{n-1} .

417. Remplaçons x par 0. La relation considérée (115) se réduit à

$$K_n(0) = 2 K_{n-1}(0).$$

Or $K_n(0)$ et $K_{n-1}(0)$ ne sont respectivement autre chose que les premiers coefficients des polynômes $K_n(x)$ et $K_{n-1}(x)$, c'est-à-dire que les nombres $Q_{n,2}$ et $Q_{n-1,2}$. Donc, quel que soit n ,

$$Q_{n,2} = 2 Q_{n-1,2}.$$

Donc, dans le triangle des séquences des permutations circulaires, les termes composant la première colonne verticale forment une progression géométrique dont la raison est 2.

C'est là un résultat que nous avons déjà (76) démontré.

118. Remplaçons x par 1. Notre formule (115) se réduit à

$$K_n(1) = (n-1)K_{n-1}(1);$$

et, comme $K_2(1)$ est égal à 1, il s'ensuit

$$K_n(1) = 1.2.3 \dots (n-1) = (n-1)!$$

Or $K_n(1)$ n'est autre chose que la somme de tous les coefficients du polynôme $K_n(x)$. Donc

$$Q_{n,2} + Q_{n,3} + Q_{n,6} + \dots + Q_{n,2n} = (n-1)!$$

C'est là un résultat à peu près évident, que nous avons d'ailleurs (110) indiqué plus haut.

III. — VALEURS, POUR $x=1$, DE QUELQUES DÉRIVÉES DE $K_n(x)$.

119. Considérons la formule

$$K_n(x) = [2 + (n-3)x]K_{n-1}(x) + 2(x-x^2)K'_{n-1}(x),$$

que nous venons d'établir (115), et prenons, par rapport à x , les dérivées d'ordre p de ses deux membres. Nous trouvons, après quelques réductions simples, l'égalité

$$K_n^{(p)}(x) = \begin{cases} p(n-2p-1)K_{n-1}^{(p-1)}(x) \\ + [2p+2+(n-4p-3)x]K_{n-1}^{(p)}(x) \\ + 2(x-x^2)K_{n-1}^{(p+1)}(x). \end{cases}$$

Remplaçons maintenant x par 1, nous trouvons finalement

$$K_n^{(p)}(1) = \begin{cases} p(n-2p-1)K_{n-1}^{(p-1)}(1) \\ + (n-2p-1)K_{n-1}^{(p)}(1). \end{cases}$$

Cette nouvelle égalité nous permettrait de calculer de proche en proche, pour $x=1$, les valeurs numériques des dérivées successives de nos polynômes horizontaux. Nous pourrions chercher à en déduire l'expression générale de $K_n^{(p)}(1)$ en fonction de n et de p . Nous nous bornerons à en tirer l'expression particulière de $K'_n(1)$ et celle de $K''_n(1)$.

120. Pour calculer $K'_n(1)$, remplaçons p par 1 dans la formule (119) qui nous donne $K_n^{(p)}(1)$. Nous obtenons

$$K'_n(1) = (n-3)K'_{n-1}(1) + (n-3)K_n^{(0)}(1).$$

Il est évident que $K_{n-1}^{(0)}(1)$ n'est autre chose que la valeur, pour $x=1$, du polynôme $K_{n-1}(x)$. Cette valeur, comme on l'a vu (118), est égale à $(n-2)!$. Donc notre nouvelle formule se réduit à

$$K'_n(1) = (n-3)K'_{n-1}(1) + (n-3)(n-2)!;$$

et c'est de là que nous allons tirer $K'_n(1)$ en fonction de n .

121. Considérons pour cela cette formule de récurrence (120) entre $K'_n(1)$ et $K'_{n-1}(1)$. Par son aspect même, elle nous conduit à essayer si, en y mettant, à la place de $K'_n(1)$, le produit par $(n-1)!$ d'un polynôme du premier degré en n , on n'y satisferait point.

On arrive, par cette voie, à l'expression

$$K'_n(1) = \frac{n-3}{3} (n-1)!,$$

qui répond à la question toutes les fois que n est égal ou supérieur à 3.

122. Pour obtenir, en fonction de n , l'expression de $K''_n(1)$, revenons à la formule (119) qui nous donne $K_n^{(p)}(1)$; et, dans cette formule, remplaçons p par 2. Nous trouvons

$$K''_n(1) = (n-5)K''_{n-1}(1) + 2(n-5)K'_{n-1}(1).$$

Or

$$K'_{n-1}(1) = \frac{n-4}{3} (n-2)!$$

Donc

$$K''_n(1) = (n-5)K''_{n-1}(1) + 2(n-5)\frac{n-4}{3} (n-2)!$$

Et c'est de cette dernière égalité que nous nous proposons de tirer $K''_n(1)$ en fonction de n .

123. Considérons pour cela cette formule (122) de récurrence entre $K''_n(1)$ et $K''_{n-1}(1)$. Par son aspect même, elle nous conduit à essayer si, en y mettant à la place de $K''_n(1)$ le produit par $(n-1)!$ d'un polynôme du second degré en n , on n'y satisferait point.

On arrive, par cette voie, à l'expression

$$K''_n(1) = \frac{(n-5)(5n-18)}{15} (n-1)!,$$

qui répond à la question et qui est vraie toutes les fois que n est égal ou supérieur à 5.

IV. — SOMME ET VALEUR MOYENNE DES NOMBRES DE SÉQUENCES.

124. Considérons les deux égalités

$$K_n(1) = (n-1)!$$

$$K'_n(1) = \frac{n-3}{3} (n-1)!$$

dont la première est pour ainsi dire évidente, et dont la seconde a été établie (121) précédemment.

Si nous en écrivons les premiers membres sous forme développée, elles deviennent

$$Q_{n,2} + Q_{n,4} + Q_{n,6} + Q_{n,8} + \dots + Q_{n,2\nu} = (n-1)!$$

$$Q_{n,4} + 2Q_{n,6} + 3Q_{n,8} + \dots + (\nu-1)Q_{n,2\nu} = \frac{n-3}{3} (n-1)!;$$

et si nous ajoutons ces deux dernières relations membres à membres, après les avoir multipliées l'une et l'autre par 2, nous trouvons

$$2Q_{n,2} + 4Q_{n,4} + 6Q_{n,6} + \dots + 2\nu Q_{n,2\nu} = \frac{2n}{3} (n-1)!$$

125. Le premier membre de cette nouvelle égalité n'est évidemment autre chose que le nombre total des séquences que présente le système complet des permutations circulaires des n premiers nombres, c'est-à-dire que la somme des nombres des séquences contenues dans toutes ces permutations. De là ce théorème :

Dans le système complet des permutations circulaires des n premiers nombres, si l'on désigne par l_n la somme des nombres de séquences de toutes les permutations, on a, pour toute valeur de n supérieure à 2

$$l_n = \frac{2n}{3} (n-1)!$$

126. Le nombre moyen des séquences que présente chaque permutation circulaire des n premiers nombres est le quotient du

nombre total l_n des séquences de ces permutations circulaires par le nombre $(n-1)!$ de ces permutations circulaires elles-mêmes. Donc

Si l'on désigne par m_n le nombre moyen des séquences que présente chaque permutation circulaire des n premiers nombres, on a, pour toute valeur de n supérieure à 2,

$$m_n = \frac{2n}{3}.$$

127. Divisant par n les deux membres de cette dernière égalité, nous trouvons l'égalité nouvelle

$$\frac{m_n}{n} = \frac{2}{3};$$

de là ce théorème :

Dans les permutations circulaires, pour toute valeur de n supérieure à 2, le rapport du nombre moyen des séquences d'une permutation au nombre des éléments de cette permutation est toujours égal à $\frac{2}{3}$.

Dans les permutations rectilignes, ce même rapport, lorsque n croît indéfiniment, tend vers la limite $\frac{2}{3}$; mais, lorsque n est fini, sa valeur dépend de n . Le théorème que nous venons d'énoncer nous donne donc un nouvel exemple d'une propriété asymptotique des permutations rectilignes transformée en une propriété habituelle des permutations circulaires.

Ce théorème, d'ailleurs, nous semble fort remarquable. Nous l'avons obtenu il y a déjà longtemps; nous l'avons donné pour la première fois au mois d'avril 1893, dans l'une des séances ⁽¹⁾ du Congrès des Sociétés savantes.

V. — SOMME ET VALEUR MOYENNE DES CARRÉS DES NOMBRES DE SÉQUENCES.

128. Supposons formé le Tableau complet des permutations circulaires des n premiers nombres; et au-dessous de chacune de ces permutations écrivons le carré du nombre des séquences

(1) Voir le *Journal officiel* du 6 avril 1893.

qu'elle renferme. Nous écrivons ainsi autant de carrés qu'il y a de permutations; et nous nous proposons de calculer, d'abord la somme de tous ces carrés, ensuite leur valeur moyenne.

129. Pour y arriver, écrivons, sous forme développée et en y remplaçant x par 1, le polynôme $K_n(x)$ et ses deux premières dérivées. Nous avons

$$\begin{aligned} Q_{n,2} + Q_{n,4} + Q_{n,6} + Q_{n,8} + \dots + Q_{n,2\nu}; \\ Q_{n,4} + 2Q_{n,6} + 3Q_{n,8} + \dots + (\nu-1)Q_{n,2\nu}, \\ 1.2Q_{n,6} + 2.3Q_{n,8} + \dots + (\nu-2)(\nu-1)Q_{n,2\nu}. \end{aligned}$$

Ajoutons maintenant ces trois développements, en multipliant le premier par 4, le deuxième par 12, le troisième par 4, et en tenant compte de l'identité évidente

$$4 + 12(t-1) + 4(t-2)(t-1) = (2t)^2.$$

Nous trouvons comme total

$$2^2 Q_{n,2} + 4^2 Q_{n,4} + 6^2 Q_{n,6} + \dots + (2\nu)^2 Q_{n,2\nu},$$

c'est-à-dire la somme même des carrés des nombres de séquences.

130. Cette somme est donc égale à

$$4K_n(1) + 12K'_n(1) + 4K''_n(1).$$

Or, comme nous l'avons vu précédemment, les expressions

$$K_n(1), \quad K'_n(1), \quad K''_n(1)$$

ont pour valeurs respectives, en fonction de n ,

$$(n-1)!, \quad \frac{n-3}{3}(n-1)!, \quad \frac{(n-5)(5n-18)}{45}(n-1)!.$$

En portant ces valeurs dans la somme trouvée, et en effectuant les calculs, nous arrivons au résultat suivant :

Dans le système complet des permutations circulaires des n premiers nombres, si l'on désigne par L_n la somme des carrés des nombres de séquences de toutes ces permutations, on a, pour toute valeur de n supérieure à 4,

$$L_n = \frac{1}{45} \frac{n(5n+2)}{1} (n-1)!$$

131. Pour avoir la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, nous divisons la somme L_n de ces carrés par leur nombre $(n - 1)!$ Nous voyons alors que :

Si l'on désigne par M_n la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, on a, pour toute valeur de n supérieure à 4,

$$M_n = \frac{4n(5n+2)}{45}.$$

132. Cherchons le rapport de cette valeur moyenne M_n du carré du nombre des séquences d'une permutation circulaire au carré n^2 du nombre des éléments de cette permutation. Nous trouvons, pour toute valeur de n supérieure à 4,

$$\frac{M_n}{n^2} = \frac{4(5n+2)}{45n},$$

et nous arrivons immédiatement à ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de la valeur moyenne du carré du nombre des séquences d'une permutation circulaire au carré du nombre des éléments de cette même permutation tend vers la limite $\frac{4}{9}$.

133. Ce dernier résultat est le même que pour les permutations rectilignes. Il semble très curieux, si l'on remarque que $\frac{4}{9}$ est le carré de $\frac{2}{3}$.

134. D'ailleurs, c'est dans le Chapitre que nous finissons que se manifeste surtout l'appauvrissement dont nous avons parlé en commençant (4) et qui résulte de ce que les permutations circulaires ont toutes un nombre pair de séquences.

CHAPITRE VI.

ENSEMBLE DU TRIANGLE.

I. — SÉRIE GÉNÉRATRICE DE TOUT LE TRIANGLE.

135. Prenons la suite indéfinie des polynômes horizontaux

$$K_2(x), \quad K_3(x), \quad K_4(x), \quad K_5(x), \quad \dots$$

et ajoutons ces polynômes, dans l'ordre même où ils se succèdent, après les avoir multipliés respectivement par les termes du développement de e^x , c'est-à-dire par les facteurs

$$1, \quad \frac{x}{1!}, \quad \frac{x^2}{2!}, \quad \frac{x^3}{3!}, \quad \dots$$

Nous formons ainsi la série

$$K_2(x) + \frac{x}{1!} K_3(x) + \frac{x^2}{2!} K_4(x) + \frac{x^3}{3!} K_5(x) + \dots;$$

et cette série, entière et à deux variables, est la série que nous allons étudier.

136. Cette série se rapporte au triangle entier des séquences des permutations circulaires. Chaque nombre, en effet, de ce triangle figure comme facteur dans l'un des termes de cette série.

Il est facile de trouver le terme de la série où figure le nombre $Q_{n,s}$ du triangle. Ce terme appartient évidemment au produit

$$\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} K_n(x);$$

c'est le terme

$$\frac{1}{(n-2)!} Q_{n,2\sigma} x^{\sigma-1} x^{n-2},$$

où la lettre σ désigne la moitié de s .

Nous sommes donc fondé à nommer cette série la *série génératrice du triangle* tout entier. C'est ainsi que nous la nommerons dorénavant.

137. D'après ce que nous savons sur les polynômes horizontaux, nous voyons immédiatement ce que devient cette série génératrice, lorsqu'on y remplace successivement x par 0 et par 1.

Lorsqu'on y remplace x par 0, chaque polynôme horizontal $K_n(x)$ se réduit à son premier terme, c'est-à-dire à 2^{n-2} . La série devient

$$1 + \frac{x}{1!} 2 + \frac{x^2}{2!} 2^2 + \frac{x^3}{3!} 2^3 + \dots;$$

elle se réduit, par conséquent, au développement de e^{2x} .

Lorsqu'on y remplace x par 1, le polynôme $K_n(x)$ se réduit, quel que soit n , à la somme de tous ses coefficients, c'est-à-dire à

$n - 1)!$, et la série considérée se réduit à la suite

$$1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots,$$

dont nous nous occuperons bientôt.

II. — FONCTION GÉNÉRATRICE DE TOUT LE TRIANGLE.

138. Considérons la série génératrice du triangle, et remplaçons-y à la fois x par 1, et y par 1. Puisque, quel que soit n ,

$$K_n(1) = (n - 1)!,$$

cette série se réduit à la suite

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

qui est évidemment divergente. Ainsi, la série génératrice est divergente, lorsque x et y sont tous les deux égaux à l'unité.

139. Dans cette même série génératrice, remplaçons par 1 la variable x seulement. Comme nous l'avons déjà vu, la série devient

$$1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots$$

Or, dans cette nouvelle série, lorsque n croît indéfiniment, le rapport d'un terme au précédent a pour limite y . Donc cette nouvelle série est convergente toutes les fois que la valeur absolue de y est inférieure à l'unité.

Il est, d'ailleurs, facile de voir que, pour toutes ces valeurs de y , on a identiquement

$$1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

140. Ainsi, notre série génératrice est convergente lorsque x est égal à 1, et que y , en valeur absolue, est inférieur à ce nombre. Il s'ensuit immédiatement ce théorème :

La série génératrice du triangle des séquences des permutations circulaires est convergente pour toutes les valeurs de x et de y dont les modules sont l'un et l'autre inférieurs à l'unité.

On peut même faire remarquer que, pour toutes ces valeurs

de x et de y , la série génératrice est, non pas simplement convergente, mais, suivant l'expression consacrée, *absolument convergente*.

141. Dans tout ce qui va suivre, nous supposons que x et y soient réels, et que leurs valeurs absolues soient toutes les deux inférieures à l'unité.

La série génératrice sera donc toujours convergente. Sa somme sera donc toujours une fonction réelle bien déterminée des variables x et y . Nous désignerons cette fonction par $\xi(x, y)$ ou, plus simplement, par ξ , et nous l'appellerons la *fonction génératrice* du triangle des séquences des permutations circulaires.

142. Nous pouvons maintenant exprimer le nombre $Q_{n, 2\sigma}$ à l'aide de la fonction génératrice ξ .

D'après ce qui précède (136), en effet, le terme de cette fonction où figure $Q_{n, 2\sigma}$ est le terme

$$\frac{1}{(n-2)!} Q_{n, 2\sigma} x^{\sigma-1} y^{n-2}.$$

Prenons la dérivée de ce terme $\sigma - 1$ fois par rapport à x , et $n - 2$ fois par rapport à y . Nous trouvons pour résultat final $(\sigma - 1)! Q_{n, 2\sigma}$. Or, ce résultat n'est autre chose que celui qu'on obtient en prenant la dérivée de la fonction génératrice $\sigma - 1$ fois par rapport à x , puis $n - 2$ fois par rapport à y , et en remplaçant finalement chacune de ces variables par zéro. Nous avons donc

$$Q_{n, 2\sigma} = \frac{1}{(\sigma - 1)!} \left(\frac{\partial^{n+\sigma-3} \xi}{\partial x^{\sigma-1} \partial y^{n-2}} \right)_{x=0, y=0}.$$

Telle est l'expression cherchée.

III. — ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

143. Pour obtenir l'équation *aux dérivées partielles* à laquelle satisfait la fonction génératrice $\xi(x, y)$, nous partirons de l'équation aux différences mêlées que nous avons trouvée dans notre cinquième Chapitre (113), et qui relie entre eux deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques. Nous l'écrirons ainsi :

$$K_n = 2K_{n-1} + (n-3)xK_{n-1} + y(x-y^2)K'_{n-1}.$$

144. Nous tirons immédiatement de cette relation les $n - 2$ égalités suivantes :

$$\begin{aligned} K_3 &= 2 K_2, \\ K_4 &= 2 K_3 + 1 x K_3 + 2 (x - x^2) K'_3, \\ K_5 &= 2 K_4 + 2 x K_4 + 2 (x - x^2) K'_4, \\ K_6 &= 2 K_5 + 3 x K_5 + 2 (x - x^2) K'_5, \\ &\dots\dots\dots, \\ K_n &= 2 K_{n-1} + (n - 3) x K_{n-1} + 2 (x - x^2) K'_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplions-les, la première par 1, la deuxième par $\frac{\gamma}{1!}$, la troisième par $\frac{\gamma^2}{2!}$, la quatrième par $\frac{\gamma^3}{3!}$, ..., la dernière par $\frac{\gamma^{n-3}}{(n-3)!}$; puis ajoutons membres à membres, par colonnes, les nouvelles égalités ainsi obtenues.

Pour effectuer cette addition, nous avons à considérer quatre colonnes : une fournie par les premiers membres; trois fournies par les seconds. Nous allons calculer successivement les totaux de ces différentes colonnes.

145. Considérons la colonne formée par les premiers membres des équations ajoutées. Son total T est évidemment

$$K_3 + \frac{\gamma}{1!} K_4 + \frac{\gamma^2}{2!} K_5 + \dots + \frac{\gamma^{n-3}}{(n-3)!} K_n.$$

Il n'est autre chose que la dérivée partielle, par rapport à γ , de la suite limitée

$$K_2 + \frac{\gamma}{1!} K_3 + \frac{\gamma^2}{2!} K_4 + \frac{\gamma^3}{3!} K_5 + \dots + \frac{\gamma^{n-2}}{(n-2)!} K_n.$$

Cette suite limitée, à son tour, n'est que la somme des $n - 1$ premiers termes de la série génératrice du triangle. Si donc nous désignons cette somme par ξ_{n-1} , nous avons l'identité

$$T = \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial \gamma},$$

qui nous donne, sous une forme simple, le total des premiers membres de nos équations.

146. Considérons la colonne formée par les premiers termes de tous les seconds membres. Son total T₁ est évidemment le

double de la suite limitée

$$K_2 + \frac{\gamma}{1!} K_3 + \frac{\gamma^2}{2!} K_4 + \frac{\gamma^3}{3!} K_5 + \dots + \frac{\gamma^{n-3}}{(n-3)!} K_{n-1}.$$

Cette suite limitée n'est autre chose que la somme des $n-2$ premiers termes de la série génératrice du triangle. Si donc nous désignons cette somme par ξ_{n-2} , nous avons l'identité

$$T_1 = 2\xi_{n-2},$$

qui nous donne le total de la première des colonnes formées par les seconds membres.

147. Considérons la colonne formée par les deuxièmes termes de tous les seconds membres. Son total T_2 est évidemment le produit par $x\gamma$ du polynôme

$$K_3 + \frac{\gamma}{1!} K_4 + \frac{\gamma^2}{2!} K_5 + \dots + \frac{\gamma^{n-4}}{(n-4)!} K_{n-1}.$$

Ce polynôme n'est autre chose que la dérivée partielle, par rapport à γ , de la suite limitée

$$K_2 + \frac{\gamma}{1!} K_3 + \frac{\gamma^2}{2!} K_4 + \frac{\gamma^3}{3!} K_5 + \dots + \frac{\gamma^{n-3}}{(n-3)!} K_{n-1}.$$

Cette suite limitée, à son tour, n'est que la somme des $n-2$ premiers termes de la série génératrice ξ . Si donc nous désignons cette somme par ξ_{n-2} , nous avons l'identité

$$T_2 = x\gamma \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial \gamma},$$

qui nous fait connaître le total de la deuxième des colonnes formées par les seconds membres.

148. Considérons enfin la colonne formée par les derniers termes de tous les seconds membres. Son total T_3 est évidemment le produit par $2(x-x^2)$ du polynôme

$$\frac{\gamma}{1!} K'_3 + \frac{\gamma^2}{2!} K'_4 + \frac{\gamma^3}{3!} K'_5 + \dots + \frac{\gamma^{n-3}}{(n-3)!} K'_{n-1}.$$

Ce polynôme n'est autre chose que la dérivée partielle, par

rapport à x , de la suite limitée

$$K_2 + \frac{y}{1!} K_3 + \frac{y^2}{2!} K_4 + \frac{y^3}{3!} K_5 + \dots + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} K_{n-1}.$$

Or, nous avons rencontré déjà (147) cette suite limitée. Nous l'avons désignée alors par ξ_{n-2} . Nous avons donc l'identité

$$T_3 = 2(x - x^2) \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial x},$$

qui nous fait connaître le total de notre quatrième et dernière colonne.

149. En se reportant aux équations ajoutées précédemment (144), on voit immédiatement que l'on a

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Remplaçons ces quatre totaux par les valeurs que nous leur avons trouvées, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial y} = 2\xi_{n-2} + xy \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial y} + 2(x - x^2) \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial x}.$$

Cette équation a lieu quels que soient n , x et y . Supposons x et y réels, et leurs valeurs absolues toutes deux inférieures à l'unité. D'après ce que nous avons vu précédemment (141), lorsque n croît indéfiniment, ξ_{n-2} tend vers la fonction génératrice ξ ; les expressions $\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial y}$ et $\frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial y}$ tendent chacune vers la dérivée partielle $\frac{\partial \xi}{\partial y}$; l'expression $\frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial x}$ tend enfin vers $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. A la limite donc l'équation précédente devient

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 2\xi + xy \frac{\partial \xi}{\partial y} + 2(x - x^2) \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

ou bien

$$2(x^2 - x) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (1 - xy) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2\xi;$$

et cette égalité exprime que la fonction génératrice $\xi(x, y)$ du triangle entier des séquences est l'une des fonctions, en nombre infini, qui satisfont à l'équation

$$2(x^2 - x) \frac{\partial \Xi}{\partial x} + (1 - xy) \frac{\partial \Xi}{\partial y} = 2\Xi,$$

laquelle est une équation aux dérivées partielles.

IV. — INTÉGRALE GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES
PARTIELLES.

150. L'équation aux dérivées partielles que nous venons d'obtenir (149) est, à la fois, du premier ordre et du premier degré. Comme on le sait depuis Lagrange, il suffit, pour en former l'intégrale générale, de calculer deux solutions du système

$$\frac{dx}{2(x^2-x)} = \frac{dy}{1-xy} = \frac{d\Xi}{2\Xi},$$

qui est un système d'équations différentielles ordinaires, puis d'écrire que ces deux solutions sont fonctions l'une de l'autre.

151. Considérons d'abord l'équation

$$\frac{dx}{2(x^2-x)} = \frac{dy}{1-xy}.$$

C'est une équation différentielle ordinaire, du premier ordre et du premier degré, qui peut s'écrire

$$2(x^2-x) \frac{dy}{dx} + xy - 1 = 0.$$

En l'intégrant par le procédé habituel, on trouve

$$L \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - y\sqrt{1-x} = \lambda,$$

λ désignant une constante arbitraire.

152. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x^2-x} = \frac{d\Xi}{\Xi},$$

dont l'intégration se réduit évidemment à une quadrature.

En effectuant cette quadrature, on arrive à ce résultat

$$\frac{x\Xi}{1-x} = \mu,$$

μ désignant encore une fonction arbitraire.

153. Pour former l'intégrale générale de l'équation aux dé-

rivées partielles (149), il nous suffit à présent de poser

$$\mu = \Theta(\lambda),$$

Θ étant une fonction arbitraire, puis de remplacer, dans cette égalité, les constantes μ, λ par les expressions en x , en y et en Ξ , auxquelles elles sont égales. En opérant ainsi, nous arrivons à l'équation

$$\Xi = \frac{1-x}{x} \Theta \left(L \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - y\sqrt{1-x} \right),$$

qui est l'intégrale générale cherchée.

Comme on peut le vérifier aisément, elle reproduit, par l'élimination de la fonction arbitraire, l'équation aux dérivées partielles (149) qu'il s'agissait d'intégrer.

V. — FONCTION GÉNÉRATRICE $\xi(x, y)$.

154. L'expression de Ξ que nous venons de former (153) est l'intégrale générale de notre équation aux dérivées partielles. Renfermant en elle une fonction arbitraire Θ , elle peut donner pour Ξ une infinité de fonctions différentes. Nous allons chercher, parmi ces fonctions en nombre infini, celle qui est précisément la fonction génératrice $\xi(x, y)$ du triangle des séquences des permutations circulaires.

155. Désignons par θ l'expression de Θ qui correspond à cette fonction génératrice ξ . Nous avons

$$\xi = \frac{1-x}{x} \theta \left(L \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - y\sqrt{1-x} \right).$$

Or, cette fonction génératrice ξ , lorsqu'on y remplace y par 0, se réduit à $Q_{2,2}$, c'est-à-dire à 1.

Remplaçons ainsi y par 0 dans cette dernière relation. Nous trouvons

$$1 = \frac{1-x}{x} \theta \left(L \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right);$$

et, par conséquent,

$$\theta \left(L \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right) = \frac{x}{1-x},$$

toutes les fois, d'ailleurs, que x est réel, et, en valeur absolue, inférieur à l'unité.

156. Pour obtenir l'expression même de cette fonction particulière θ , posons

$$L \frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = e^v.$$

Nous avons immédiatement

$$1 + \sqrt{1-x} = \sqrt{x} \cdot e^v,$$

d'où il suit

$$1 - \sqrt{1-x} = \sqrt{x} \cdot e^{-v},$$

et, par conséquent,

$$x = \frac{4}{(e^v + e^{-v})^2}.$$

Portant ces résultats dans l'équation précédente (155), nous trouvons, toutes réductions faites,

$$\theta(v) = \frac{4}{(e^v - e^{-v})^2}.$$

Telle est l'expression de la fonction particulière $\theta(v)$.

157. Considérons cette fonction particulière $\theta(v)$ et remplaçons-y la variable v par l'expression

$$L \frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - y\sqrt{1-x}.$$

Nous trouvons, par un calcul sans grandes difficultés, que cette fonction particulière prend la valeur θ_1 donnée par l'égalité

$$\theta_1 = \frac{4x(1 + \sqrt{1-x})^2 e^{2y\sqrt{1-x}}}{[(1 + \sqrt{1-x})^2 - x e^{2y\sqrt{1-x}}]^2}.$$

C'est cette valeur que nous allons utiliser.

158. Remarquons pour cela que la fonction génératrice ξ est donnée (153) par la formule

$$\xi = \frac{1-x}{x} \theta_1;$$

et remplaçons, dans cette formule, θ_1 par l'expression que nous venons d'obtenir. Nous trouvons, après quelques réductions,

$$\xi = i \frac{(1+x)(1 + \sqrt{1-x})^2 e^{2y\sqrt{1-x}}}{[(1 - \sqrt{1-x})^2 + x e^{2y\sqrt{1-x}}]^2}.$$

Telle est la fonction génératrice du triangle entier des séquences des permutations circulaires.

VI. — QUELQUES VÉRIFICATIONS.

159. Sous la forme où nous venons de la donner (158), la fonction génératrice du triangle se prête assez mal aux vérifications que nous voulons faire. En particulier, pour $x = 1$, son numérateur et son dénominateur s'annulent à la fois : elle devient en apparence indéterminée.

160. On peut éviter cet inconvénient en prenant l'expression de la fonction ξ et y remplaçant, au dénominateur, $e^{2y\sqrt{1-x}}$ par son développement. On s'aperçoit aussitôt que le produit $4(1-x)$ se trouve en facteur aux deux termes de la fonction ξ . En supprimant ce facteur commun, on supprime la cause de l'indétermination dont nous avons parlé, et l'on trouve

$$\xi = \frac{(1 + \sqrt{1-x})^2 e^{2y\sqrt{1-x}}}{\left[1 + \sqrt{1-x} - xy \left(1 + \frac{2y\sqrt{1-x}}{2!} + \frac{4y^2(1-x)}{3!} + \dots \right) \right]^2},$$

c'est-à-dire une nouvelle expression de la fonction génératrice $\xi(x, y)$, préférable de beaucoup à celle (158) que nous avons donnée plus haut.

161. Dans cette expression, remplaçons y par 0, laissant x quelconque. Nous trouvons

$$\xi(x, 0) = 1.$$

Il en devait être ainsi, puisque, d'après sa définition même, lorsque y s'annule, la fonction ξ se réduit à son premier terme, c'est-à-dire à K_2 , qui est égal à 1.

C'est d'ailleurs sur la connaissance de cette valeur de $\xi(x, 0)$ que nous nous sommes appuyé (155) pour particulariser la fonction arbitraire Θ .

162. Dans la même expression (160) de ξ , remplaçons x par 0, sans toucher à y . Nous trouvons

$$\xi(0, y) = e^{2y}.$$

résultat que nous avons obtenu précédemment (137), en le tirant de la définition même de la série génératrice du triangle.

163. Sans toucher à y , remplaçons encore, dans la fonction génératrice du triangle, x par 1. Nous trouvons immédiatement

$$\xi(1, y) = (1 - y)^{-2},$$

résultat qui nous était (139) déjà connu.

164. Les vérifications qui précèdent sont les plus simples possibles. On en pourrait évidemment effectuer une infinité d'autres.

En particulier, on pourrait considérer les dérivées partielles successives, par rapport à x , de la fonction génératrice ξ , et voir ce que ces dérivées deviennent lorsqu'on y remplace x par 0. On obtiendrait ainsi des fonctions de y : ce seraient les sommes de séries, entières en y , dans chacune desquelles les différents termes contiendraient, comme facteurs, les nombres composant l'une des colonnes du triangle des séquences des permutations circulaires.

En particulier aussi, on pourrait calculer les dérivées successives, par rapport à y , de cette même fonction ξ , puis remplacer, dans ces dérivées, y par 0 : on devrait trouver finalement pour résultats les polynômes horizontaux $K_2, K_3, K_4, \dots$.

Au reste, ces différentes vérifications, dont nous avons effectué les premières, seraient de plus en plus laborieuses, et elles ne présenteraient qu'un très faible intérêt.

165. Quoi qu'il en soit, les études que nous venons de faire sur les permutations circulaires rappellent entièrement celles que nous avons faites autrefois sur les permutations rectilignes. Les trois derniers Chapitres du présent travail sont, pour ainsi parler, la reproduction, sous forme réduite, dans le même ordre et parfois dans les mêmes termes, des trois Chapitres composant notre Mémoire *Sur le triangle des séquences des permutations rectilignes*.

NOTE SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉS TRAITÉE PAR D'ALEMBERT
DANS L'ENCYCLOPÉDIE;

Par M. G. MAUPIN.

Le but de la présente Note est très modeste : il consiste à rectifier des erreurs commises, sans doute par inadvertance, par d'Alembert dans un des exemples de calcul des probabilités qu'il traite dans l'*Encyclopédie*. Ce genre d'erreurs est d'ailleurs si aisé à rencontrer que Lacroix a soin, dans son *Traité élémentaire*, d'en prévenir le lecteur pour l'empêcher d'y tomber.

J'ai eu l'occasion de reproduire, dans mes *Questions d'Algèbre*, un des exemples de d'Alembert. Celui dont je vais parler, quoiqu'un peu moins simple, se résoudra sans difficulté, pouvant être ramené aux trois problèmes suivants.

PREMIER PROBLÈME.

I. On a sept urnes, A, B, C, D, E, F, G, renfermant chacune une boule blanche, et respectivement 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 boules noires. On prend une boule successivement dans chacune d'elles : trouver la probabilité de n'avoir que des boules blanches.

Il y a une chance sur 8 de tirer de la première urne une boule blanche, une chance sur 7 de la tirer de la deuxième, ... Ces événements devant tous être concomitants, la probabilité cherchée est

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}.$$

Autrement. — Il y a 8! cas en tout; ces cas sont également possibles et il y a un seul cas favorable. La probabilité est

$$\frac{1}{8!}.$$

Généralement. — Pour n urnes, la probabilité est

$$\frac{1}{n!}.$$

II. *Mêmes conditions.* — De l'une des urnes, considérée au hasard, on tire une boule : probabilité pour qu'elle soit blanche.

La probabilité pour qu'on mette la main dans la première urne est $\frac{1}{7}$; la probabilité qu'il sorte une boule blanche de cette urne étant $\frac{1}{8}$, la probabilité du concours de ces deux événements est $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}$. Pour la seconde, c'est $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$, et ainsi de suite. La probabilité totale est donc

$$\frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right).$$

Généralement. — Pour n urnes, on a de même

$$\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} \right).$$

III. *Mêmes conditions.* — On tire une boule de chaque urne : probabilité d'en avoir au moins une blanche.

Il y a en tout $8!$ cas possibles, une seule chance de n'avoir que des boules noires, $8! - 1$ chances, par suite, d'en avoir au moins une blanche.

La probabilité cherchée est

$$\frac{8! - 1}{8!}.$$

Généralement. — Pour n urnes, la probabilité est

$$\frac{n! - 1}{n!}.$$

DEUXIÈME PROBLÈME.

I. On prend les urnes A et B, on tire une boule de chacune : probabilité pour que les deux boules soient blanches.

C'est

$$\frac{1}{8} \times \frac{1}{7}.$$

II. *Mêmes conditions.* — On tire une boule d'une des urnes : probabilité pour qu'elle soit blanche.

C'est

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right).$$

TROISIÈME PROBLÈME.

I. On prend maintenant tous les groupes de deux urnes, AB, AC, AD, AE, AF, AG, BC, ..., FG. De chacune des deux urnes d'un seul groupe on tire une boule : probabilité pour qu'elles soient toutes les deux blanches.

Il y a

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ groupes.}$$

La probabilité d'en choisir un, AB par exemple, est $\frac{1}{21}$. Cela posé, il y a une probabilité $\frac{1}{8}$ de tirer une boule blanche de A, une probabilité $\frac{1}{7}$ de tirer une boule blanche de B, une probabilité $\frac{1}{8 \cdot 7}$ que ces deux événements arrivent ensemble. Ainsi, la probabilité de réussir, dans ce cas, est

$$\frac{1}{21} \times \frac{1}{8 \cdot 7}.$$

Si l'on joint les différentes probabilités des 21 parties de l'événement considéré, il vient

$$\frac{1}{21} \left(\frac{1}{8 \cdot 7} + \frac{1}{8 \cdot 6} \dots + \frac{1}{8 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2} \right).$$

En général. — Pour un nombre n de boules, la probabilité est

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)} \left[\frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-2)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2} \right].$$

II. *Mêmes conditions.* — De l'une seulement des deux urnes d'un seul des groupes on tire une boule : probabilité pour qu'elle soit blanche.

Il y a une chance sur vingt et une de choisir par exemple le premier groupe. Ensuite, il y a une chance sur deux de prendre dans ce groupe l'urne A, une chance sur deux aussi de prendre l'urne B. Par suite, la probabilité de prendre la bille blanche est, dans A,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8},$$

dans B,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7},$$

dans le groupe,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right).$$

Cela donne, pour probabilité de réussite dans cette première expérience,

$$\frac{1}{21} \propto \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right),$$

et, en tout,

$$\begin{aligned} \frac{1}{21} &\propto \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{7} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

En général. — Pour n boules, la probabilité est

$$\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} \right).$$

Voici maintenant la question de d'Alembert : les indications α , β , γ , δ ont été placées pour faciliter le langage.

« Pierre tient huit cartes dans ses mains, qui sont : un as, un deux, un trois, un quatre, un cinq, un six, un sept et un huit, qu'il a mêlées : Paul parie que, les tirant l'une après l'autre, il les devinera à mesure qu'il les tirera. On demande combien Pierre doit parier contre un que Paul ne réussira pas dans son entreprise? »

« Par l'énoncé de la question, on suppose que Paul parie de tirer toutes les cartes l'une après l'autre, sans les remettre dans le jeu après les avoir tirées, et sans manquer une seule fois à deviner juste la carte qu'il tirera. »

(α). — Dans ce cas, l'espérance de Paul au premier coup est $\frac{1}{8}$, au second $\frac{1}{7}$; d'où il s'ensuit que son espérance pour les deux premiers coups est $\frac{1}{8} \times \frac{1}{7}$; et, en effet, il est aisé de voir que le premier coup ayant huit cas possibles, et le second sept, la combinaison des deux aura 8×7 coups, dont il n'y en a qu'un seul

qui fasse gagner Pierre, celui où il devinera juste deux fois de suite. Par la même raison, l'espérance de Pierre pour trois coups sera $\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{6}$; pour quatre, $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$; et, pour sept (car il n'y en peut avoir huit, attendu qu'après sept tirages il ne reste plus de cartes à tirer, et il n'y a plus de jeu), elle sera $\frac{1}{8} \times \frac{1}{7} \times \dots \times \frac{1}{2}$; donc l'enjeu de Pierre sera à celui de Paul comme $8 \times 7 \times \dots \times 2 - 1$ est à 1, c'est-à-dire comme $56 \times 720 - 1$ est à 1, ou comme 40 319 est à 1. »

(β) « Si Paul parioit d'amener ou de deviner juste à un des sept coups seulement, son espérance seroit $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2}$, et par conséquent l'enjeu de Pierre à celui de Paul, comme $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2}$ à $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{7} - \dots - \frac{1}{2}$. »

(γ) « Si Paul parioit d'amener juste dans les deux premiers coups seulement, son espérance seroit $\frac{1}{8} + \frac{1}{7}$, et le rapport des enjeux celui de $\frac{1}{8} + \frac{1}{7}$ à $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{7}$. »

(δ) « S'il parioit d'amener juste dans deux coups quelconques, son espérance seroit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \times \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{6} + \dots \\ & + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5}, \dots \text{ » } (1) \end{aligned}$$

D'Alembert entend évidemment qu'après chaque épreuve on connaît la carte enlevée, et que, par suite, on doit s'abstenir de nommer celle-ci aux épreuves suivantes. Autrement dit, à chaque épreuve on connaît exactement la nature des cartes qui composent le paquet sur lequel on opère.

Cela posé, le cas (α) correspond au *premier Problème*, I. Le raisonnement est exact.

Dans le cas (β), l'espérance indiquée pour Paul est supérieure

(1) D'ALEMBERT, *Encyclopédie*, I. I. p. 366-367.

à l'unité, ce qui est absurde. D'Alembert veut-il dire qu'on fait les sept épreuves successivement? Alors c'est le *premier Problème*, III. On peut aussi supposer que Paul choisisse, parmi les sept épreuves, celle sur laquelle il se propose de deviner juste, et alors c'est le *premier Problème*, II. Il semble bien que d'Alembert se soit placé dans cette dernière hypothèse, en omettant le facteur $\frac{1}{7}$.

Dans le cas (γ), suivant que Paul veut amener juste dans chacun des deux coups ou dans un des deux seulement, on se trouve dans les hypothèses I ou II du *deuxième Problème*. Sans doute dans l'hypothèse II, et le facteur $\frac{1}{2}$ a été oublié.

Enfin, dans le cas (δ), Paul parie-t-il d'amener juste dans les deux coups quelconques ou dans un seul de ces deux coups. On est, suivant l'hypothèse, dans les parties I ou II du *troisième Problème*. A examiner le résultat de d'Alembert, il semblerait que ce géomètre, ayant perdu de vue le cas (γ), se soit placé cette fois dans l'hypothèse I, et qu'il ait omis le facteur $\frac{1}{21}$.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 JUIN 1893.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Fleury : *Sur la considération de l'infini dans l'Analyse.*

M. Carvallo : *Démonstration du théorème de Coriolis.*

M. Raffy : *Sur la définition du genre des courbes algébriques planes.*

M. LAISANT communique les observations suivantes :

A propos des asymptotes et des cercles de courbure.

Au sujet d'une récente Communication que j'ai faite à la Société, et qui est intitulée *Note relative aux asymptotes et aux*

cercles de courbure ⁽¹⁾, M. Émile Borel me fait remarquer que la propriété signalée peut se déduire de propositions plus générales relatives à l'ordre de contact des courbes aux points fondamentaux d'une transformation Cremona. Il ajoute qu'il s'est servi de cette transformation dans sa copie du concours général, en 1889, pour construire l'asymptote d'une courbe, et que cette copie a été imprimée chez Delalain, dans un Recueil de compositions couronnées aux concours généraux.

Bien que notre jeune et éminent Collègue me déclare qu'il n'élève à ce sujet aucune réclamation de priorité, je tiens à faire connaître à la Société les renseignements qu'il me communique, d'autant plus que cela ne pourra qu'attirer davantage l'attention sur une question fort intéressante au point de vue de l'enseignement.

M. MAUPIN adresse la Note suivante :

Note relative à un passage d'Albert Girard.

Que la théorie des fractions continues soit due à lord Brouncker, ou bien, comme l'affirme Libri, à Cataldi, il semble bien qu'Albert Girard en ait eu une idée fort nette, ainsi qu'il appert du passage suivant ⁽²⁾, relatif à la série de Fibonacci :

« Puis que je suis entré en la matière des nombres rationaux j'adjoûteray encor deux ou trois particularitez non encor par ey devant practiquées, comme d'explicquer les radicaux extremement pres, par certains nombres à ce plus aptes et idoines que les autres, tellement que si l'on entreprenoit les mesmes choses par des autres nombres ce ne seroit sans grandement augmenter le nombre des caractères; et pour exemple soit proposé d'explicquer par des rationaux la raison des segmens de la ligne coupée en la moyenne et extreme raison, soit faicte une telle progression 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc., dont chasque nombre soit egal

⁽¹⁾ Page 95 du présent Volume.

⁽²⁾ Voyez à ce sujet les *Œuvres mathématiques* de SIMON STEVIN de Bruges, où sont insérées les *Mémoires mathématiques esuelles s'est exercé le Très haut et Très illustre Prince Maurice de Nassau, prince d'Aurenge, . . . Le tout reveu, corrigé et augmenté* par ALBERT GIRARD SAMIELOIS, *Mathematicien*. In-folio de 678 p., Leyde, 1634. — Le passage cité est à la page 169.

aux deux précédens, alors deux nombres pris immédiatement denotteront la mesme raison, comme 5 à 8 ou 8 à 13, et tant plus grands, tant plus pres, comme ces deux 59 479 986 et 96 234 155, tellement que 13, 13, 21 constituent assez précisément un triangle isosceles ayant l'angle du pentagone. »

Je ferai remarquer seulement que, si l'on considère un triangle isoscèle dont l'angle au sommet vaille 108°, le rapport du côté à la base est égal à

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

dont les réduites successives sont 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{13}{21}$, ..., ce qui vérifie l'assertion d'Albert Girard.

Les nombres 59 475 986 et 96 234 155 sont inexacts et doivent être remplacés par 63 245 986 et 102 334 155. Est-il bien invraisemblable de supposer que cette erreur viendrait de ce que, considérant la suite 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., Albert Girard aurait écrit, comme vingt-cinquième terme, le nombre 111 393 pour 121 393? Cette omission d'une unité du cinquième ordre donnerait, au bout de treize opérations subséquentes, une nouvelle erreur de 377 unités du même ordre, et au bout de quatorze opérations une erreur de 610 unités. Or on a bien

$$\begin{aligned} 6\ 324 - 5947 &= 377, \\ 10\ 233 - 9623 &= 610. \end{aligned}$$

SÉANCE DU 19 JUIN 1895.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. Selivanoff : *Étude élémentaire des polynômes de Bernoulli.*

M. d'Ocagne : *Sur un problème proposé au dernier concours de l'École Polytechnique.*

SÉANCE DU 3 JUILLET 1895.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Selivanoff : *Sur les fractions continues périodiques.*

M. Demoulin adresse une Note *Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales.*

M. PICARD transmet la Note suivante :

Sur les fonctions à espaces lacunaires ;

Par M. G. D'ARONE.

En modifiant convenablement la fonction connue $\Theta(x)$, M. Freedholm a pu construire la transcendante

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^{n^2} \quad | \alpha | < 1,$$

qui, pour des valeurs de x dont le module est moindre que l'unité, représente une fonction uniforme et continue ainsi que toutes ses dérivées dans un cercle de rayon un, contour inclus.

La représentation conforme nous permet d'affirmer le même fait pour la transcendante

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^n}{(x - \alpha_1)^{n^2}} \quad | \alpha_1 | < 1,$$

où α_1 est l'affixe d'un point quelconque du plan, pour tous les points du plan extérieurs au cercle de centre α_1 et de rayon égal à l'unité.

Désignons alors par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les affixes de trois points du plan tels que les circonférences de rayon égal à l'unité se coupent deux à deux ; il est évident que la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \frac{\alpha_s^n}{(x - \alpha_s)^{n^2}} \quad | \alpha_s | < 1$$

existera dans l'espace compris en dehors de ces trois circonférences.

Or, par trois des six points d'intersection des trois circonférences convenablement choisis, traçons une circonférence; soit α l'affixe du centre et r le rayon; il est évident que la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \left[\frac{a_s^n}{(x - a_s)^{n^2}} + \frac{\overline{a_s}^n}{(x - \alpha)^{-n^2}} \right] \quad |a_s| < 1$$

existera comme la fonction de Freedholm dans le triangle curviligne susdit.

Exemple I. — Suivant M. Appell, appelons $+1, +i, -1, -i$ les affixes de quatre points placés sur les axes rectangulaires, que nous prendrons comme centres, et ayant choisi comme rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, nous obtiendrons un quadrilatère curviligne.

Ensuite, de l'origine comme centre et avec le même rayon, décrivons une autre circonférence; il est évident que la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_1^n}{(x+1)^{n^2}} + \frac{a_2^n}{(x-1)^{n^2}} + \frac{a_3^n}{(x-i)^{n^2}} + \frac{a_4^n}{(x+i)^{n^2}} + \frac{a_5^n}{x^{-n^2}} \right]$$

existera seulement dans le susdit quadrilatère.

Exemple II. — Soient $+1, -1$ les affixes de deux points placés sur l'axe des x , que nous prendrons comme centres et, choisissant comme rayon l'unité, nous obtiendrons deux circonférences tangentes à l'origine des coordonnées. De ce point comme centre et avec un rayon égal à deux, on décrit une circonférence.

Dans l'espace compris entre la circonférence de rayon deux et les deux premières circonférences, la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_1^n}{(x+1)^{n^2}} + \frac{a_2^n}{(x-1)^{n^2}} + \frac{a_3^n}{x^{-n^2}} \right]$$

est uniforme et continue; dans tout autre espace elle n'a pas d'existence.

SÉANCE DU 17 JUILLET 1895.

PRÉSIDENTE DE M. BIOCHE.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. N. Delaunay, présenté par MM. Carvallo et Raffy.

Communications :

M. Raffy : *Sur les lignes de plus grande pente.*

M. Paul ADAM fait la Communication suivante :

Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure.

Dans son Mémoire bien connu sur la déformation des surfaces ⁽¹⁾, O. Bonnet s'est occupé des surfaces applicables les unes sur les autres avec conservation des lignes de courbure. Il a établi que la détermination de ces surfaces dépend de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \sin 2\theta.$$

A une fonction $\theta(u, v)$ satisfaisant à cette équation correspond un couple de surfaces répondant à la question.

Si l'on suppose que θ ne dépende que de u , par exemple, on obtient les surfaces moulures de Monge (O. Bonnet arrive à ces surfaces par une autre voie); une surface moulure de Monge est, en effet, susceptible de se déformer d'une manière continue avec conservation des lignes de courbure.

On peut former l'équation (1) d'une manière très simple.

Supposant les surfaces cherchées rapportées à leurs lignes de courbure, considérons les formules de Codazzi; il faut y supposer les rotations p et q , égales à zéro, et le problème revient à trouver deux systèmes de solutions

$$\begin{array}{cccc} p_1, & q, & r, & r_1, \\ p'_1, & q', & r, & r_1. \end{array}$$

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier.

des trois équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial u} = -q r_1, \\ \frac{\partial q}{\partial v} = r p_1, \\ \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -q p_1. \end{array} \right.$$

On doit donc avoir

$$p_1 \frac{\partial p_1}{\partial u} = p'_1 \frac{\partial p'_1}{\partial u},$$

$$q \frac{\partial q}{\partial v} = q' \frac{\partial q'}{\partial v},$$

et, en intégrant,

$$p'^2_1 = p^2_1 + V,$$

$$q'^2 = q^2 + U.$$

Mais, en particulierisant les variables u et v , on peut supposer les fonctions V et U égales à -2 , et écrire

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} p'^2_1 = p^2_1 - 2, \\ q'^2 = q^2 - 2. \end{array} \right.$$

Multipliant ces deux équations membre à membre et remarquant que, d'après la dernière des équations (2),

$$p_1 q = p'_1 q',$$

on trouve

$$(4) \quad p^2_1 + q^2 = 2.$$

Ainsi p_1 , q , r et r_1 doivent satisfaire aux équations (2) et (4); ensuite le système (3) définit p'_1 et q' .

Posons alors

$$p_1 = \sqrt{2} \sin \theta,$$

$$q = \sqrt{2} \cos \theta.$$

La relation (4) est vérifiée d'elle-même; les deux premières équations (2) donnent

$$r_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$r = \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

et la dernière devient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \sin 2 \theta,$$

ce qui est bien l'équation de Bonnet.

M. BIOCHE, au nom du Conseil de la Société, présente le rapport suivant :

Rapport sur un projet de Congrès mathématiques internationaux.

Il a été question depuis quelque temps, dans les correspondances échangées entre les mathématiciens de divers pays, d'un projet de congrès mathématiques internationaux. Les lecteurs de l'*Intermédiaire des mathématiciens* ont trouvé, dans les numéros de juillet et décembre 1894, des renseignements à ce sujet.

Les promoteurs du projet ont reçu des adhésions nombreuses et plusieurs sociétés, en particulier l'Association française pour l'avancement des Sciences, la Deutsche Mathematiker Vereinigung, la Société mathématique de New-York, la Société philomathique de Paris ont émis des vœux favorables.

Le Conseil de la Société mathématique de France, saisi de la question par M. Laisant, a décidé de proposer à la Société de suivre cet exemple.

Le projet d'organisation n'est pas définitivement arrêté ; mais les principes en sont bien établis et il est facile de se rendre compte qu'il est réalisable.

Voici le programme que traçait M. le professeur Wassilieff, de l'Université de Kazan : « Point de petites communications qui traitent des détails de la Science, et bien souvent n'intéressent que le rapporteur, mais de grands rapports sur les progrès et l'état de différentes parties de notre Science dans le siècle qui va se terminer. Je vous rappelle les beaux rapports de MM. Chasles et Bertrand pour l'Exposition de 1867. »

Les Congrès mathématiques internationaux auraient donc pour objet de donner une périodicité régulière à des rapports tels que ceux cités par M. Wassilieff, celui de M. Gino Loria sur le développement de la Géométrie, et divers autres. Ces rapports provoqueraient des discussions particulièrement intéressantes, en fournissant l'occasion de faire ressortir des idées générales et de signaler les desiderata de la Science. On aurait ainsi un inventaire raisonné et périodique des progrès des Mathématiques, qui compléterait le Répertoire bibliographique. Il a semblé au Conseil que la Société mathématique, après avoir prêté son concours à

l'organisation du Répertoire, ne pouvait manquer d'aider aussi à celle des congrès internationaux.

Les Congrès se suivraient avec des intervalles de quelques années. L'idée des promoteurs de ces Congrès serait d'en provoquer un en 1897 pour fixer l'organisation définitive; on a proposé pour siège de ce congrès Genève ou Bâle; en tous cas, il est probable que la ville choisie serait une ville de pays neutre aussi centrale que possible. Le second congrès se tiendrait à Paris à l'occasion de l'Exposition de 1900.

Ce court exposé permettra, je pense, aux membres de la Société de se rendre compte de l'intérêt des Congrès mathématiques internationaux et des conditions de leur réalisation; il pourra justifier ainsi la proposition que je fais au nom du Conseil *d'adhérer aux principes de cette organisation et d'y prendre une part active.*

Les conclusions de ce rapport sont mises aux voix et adoptées à l'unanimité.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN THÉORÈME DE RIBAUCCOUR ET SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES SURFACES SPIRALES;

Par M. A. DEMOULIN.

1. Une des propriétés les plus importantes de la théorie de la correspondance par orthogonalité des éléments a été énoncée par Ribaucour à la page 230 de son *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* ⁽¹⁾. Voici en quoi elle consiste :

Soient deux surfaces (M) et (M_1) qui se correspondent par orthogonalité des éléments; si, par les points de (M_1) , on mène des droites D parallèles aux normales de (M) , elles forment

⁽¹⁾ *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique*, in-4, t. XLIV; 1881.

une congruence (D) qui jouit des propriétés suivantes : 1° elle admet la surface (M₁) comme surface moyenne; 2° les plans focaux de D sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de (M) en M.

La démonstration de ce théorème est aisée par l'emploi des formules de Codazzi; nous allons en faire connaître une autre, plus élémentaire, fondée sur une méthode que nous avons proposée, il y a deux ans ⁽¹⁾, pour la détermination des surfaces (M₁) qui correspondent à une surface donnée (M), par orthogonalité des éléments. Nous rappellerons d'abord brièvement cette méthode.

2. Supposons que les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque M de (M) soient exprimées au moyen de deux paramètres u et v ; appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point correspondant M₁. On a, par hypothèse,

$$\sum dx dx_1 = dx dx_1 + dy dy_1 + dz dz_1 = 0$$

ou

$$du^2 \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} + du dv \left(\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} \right) + dv^2 \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0$$

On tire de là, du et dv étant arbitraires,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \\ \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0. \end{array} \right.$$

Pour intégrer ce système de trois équations simultanées aux inconnues x_1, y_1, z_1 , posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x_1 \frac{\partial x}{\partial u} = H, \\ \sum x_1 \frac{\partial x}{\partial v} = K. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 27 mars 1893.

Différentiant ces égalités successivement par rapport à u et à v , et tenant compte des relations (1), nous aurons

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{S}^{x_1} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial H}{\partial u}, \\ \mathbf{S}^{x_1} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial K}{\partial u} \right), \\ \mathbf{S}^{x_1} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial K}{\partial v}. \end{cases}$$

Si l'on élimine entre les équations (2) et (3) les inconnues x_1, y_1, z_1 , on obtiendra deux équations auxquelles doivent satisfaire les fonctions H et K . Ces fonctions une fois connues, trois des équations (2) et (3) nous donneront x_1, y_1, z_1 .

3. Cela rappelé, observons que la perpendiculaire D , abaissée du point M_1 sur le plan tangent en M , peut être représentée par les équations

$$(4) \quad \mathbf{S}^X \frac{\partial x}{\partial u} = H.$$

$$(5) \quad \mathbf{S}^X \frac{\partial x}{\partial v} = K.$$

Prenons pour u et v les paramètres des asymptotiques de (M) ; x, y, z vérifient alors deux équations de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = a \frac{\partial \theta}{\partial u} + b \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = a' \frac{\partial \theta}{\partial u} + b' \frac{\partial \theta}{\partial v};$$

il en résulte

$$\frac{\partial H}{\partial u} = aH + bK, \quad \frac{\partial K}{\partial v} = a'H + b'K.$$

Je dis que les équations (4) et (5) représentent les plans focaux de la droite D . Pour le démontrer, il suffit de faire voir que chacun de ces plans touche son enveloppe en un point de D . Or le point de contact du plan (4) avec son enveloppe est à l'intersection des trois plans

$$\mathbf{S}^X \frac{\partial x}{\partial u} = H, \quad \mathbf{S}^X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \mathbf{S}^X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial H}{\partial v}$$

dont les deux premiers passent par D . On démontrera de même que le second plan focal de D est représenté par l'équation (5).

Mais les plans (4) et (5) sont respectivement perpendiculaires aux directions asymptotiques $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ et $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$; la seconde partie du théorème de Ribaucour est donc démontrée.

4. On peut déduire de là, par la Géométrie, que les développables de la congruence (D) et les lignes asymptotiques de la surface (M) se correspondent. Néanmoins, nous croyons qu'il ne sera pas sans intérêt d'établir ce théorème par l'Analyse.

Reprenons les équations de la droite D

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = \Pi, \quad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = K.$$

Cette droite engendrera un élément de développable si les équations ci-dessus sont compatibles avec celles que l'on obtient en les différentiant totalement par rapport à u et à v , savoir :

$$\begin{aligned} \sum X \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv \right) &= \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv, \\ \sum X \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv \right) &= \frac{\partial K}{\partial u} du + \frac{\partial K}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Éliminons X, Y, Z entre ces quatre équations; nous obtiendrons l'équation différentielle des développables de la congruence

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} dv & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} dv & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} dv & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv & \frac{\partial K}{\partial u} du + \frac{\partial K}{\partial v} dv & \Pi & K \end{vmatrix} = 0.$$

A cause du choix des paramètres u et v , cette équation se réduit à

$$du dv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} & \frac{\partial K}{\partial u} & \Pi & K \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient de $du dv$ n'est pas nul, si les lignes asymptotiques de la surface (M) forment deux familles distinctes; les développables de la congruence (D) sont donc définies par les équations $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, ce qui démontre le théorème.

5. Il nous reste à établir la première partie du théorème de Ribaucour. Soient (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées des points focaux de D. Il suit des considérations du n° 3 que l'on a

$$\begin{aligned} \sum X_1 \frac{\partial x}{\partial u} &= H, & \sum X_1 \frac{\partial x}{\partial v} &= K, & \sum X_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial H}{\partial v}, \\ \sum X_2 \frac{\partial x}{\partial u} &= H, & \sum X_2 \frac{\partial x}{\partial v} &= K, & \sum X_2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial K}{\partial u}. \end{aligned}$$

De ces équations et des équations

$$\sum x_1 \frac{\partial x}{\partial u} = H, \quad \sum x_1 \frac{\partial x}{\partial v} = K, \quad \sum x_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial K}{\partial u} \right),$$

on déduit les suivantes :

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{X_1 + X_2}{2} - x_1 \right) \frac{\partial x}{\partial u} &= 0, \\ \sum \left(\frac{X_1 + X_2}{2} - x_1 \right) \frac{\partial x}{\partial v} &= 0, \\ \sum \left(\frac{X_1 + X_2}{2} - x_1 \right) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= 0, \end{aligned}$$

lesquelles donnent, si l'on observe que le déterminant $\left| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right|$ n'est pas nul,

$$\frac{X_1 + X_2}{2} = x_1, \quad \frac{Y_1 + Y_2}{2} = y_1, \quad \frac{Z_1 + Z_2}{2} = z_1.$$

Ces égalités expriment que (M_1) est la surface moyenne de la congruence (D).

6. Je ne sortirai pas de la théorie de la correspondance par orthogonalité des éléments en démontrant le théorème suivant, qui caractérise les surfaces spirales :

Soit (M) une surface rapportée à trois axes rectangulaires

Ox, Oy, Oz . *Projetons un point quelconque M de (M) sur le plan xOy en P, et appelons P' un point situé dans le plan xOy et tel que le triangle POP' soit rectangle en O et de similitude constante. Cela posé, si la droite MP' est tangente en M à la surface (M), celle-ci sera une surface spirale.*

Soient (x, y, z) les coordonnées du point M; celles du point P' seront $(-my, mx, 0)$, m désignant une constante, et la propriété supposée à la surface (M) se traduira par l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} (x - my) + \frac{\partial z}{\partial y} (y + mx) = z.$$

La théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre nous apprend que la surface (M) est le lieu d'une série simplement infinie de courbes satisfaisant aux équations différentielles

$$\frac{dx}{x - my} = \frac{dy}{y + mx} = dz.$$

Or ces équations sont précisément celles qui définissent les génératrices des surfaces spirales (voir G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 108). La surface (M) est donc bien une surface spirale.

On sait que la surface (M) et le plan xOy se correspondent par orthogonalité des éléments, M et P' étant des points correspondants. Il suit de là et d'un théorème que j'ai démontré ailleurs ⁽¹⁾ que la surface (M) est applicable sur une surface spirale; mais, en vertu du théorème ci-dessus, la surface (M) est une spirale; ce théorème permet donc de distinguer les spirales parmi les surfaces qui sont applicables sur des spirales.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 12 février 1894.

THÉORÈME SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES DE TRANSLATION;

Par M. Paul ADAM.

Dans un récent article *Sur la déformation des surfaces* ⁽¹⁾, j'ai été amené à considérer les deux surfaces suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} x = 2u^2 + v^2, \\ y = -2av, \\ z = 2bu, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = -2 \int \sqrt{b^2 + 3u^2} du, \\ y_1 = u^2 + 2v^2, \\ z_1 = 2 \int \sqrt{a^2 - 3v^2} dv, \end{cases}$$

qui sont applicables l'une sur l'autre et dont la première est un parabolôïde elliptique.

La forme des équations ci-dessus montre que *ces deux surfaces sont engendrées par la translation plane d'une courbe plane (u) ou (v) invariable de forme et de grandeur*, et que, pour chacune d'elles, *les deux systèmes de courbes génératrices (u) et (v) sont dans des plans rectangulaires*.

Je vais démontrer que, d'une manière générale :

Pour qu'une surface (S), engendrée par la translation plane d'une courbe plane invariable de forme et de grandeur, puisse se déformer en conservant ce mode de génération, avec correspondance des deux systèmes de courbes génératrices (u) et (v) sur (S) et sur sa transformée (S₁), il faut et il suffit que ces deux systèmes de courbes soient dans des plans rectangulaires.

Supposons en effet que ces courbes génératrices soient

1° Pour (S), les courbes (v), dans les plans parallèles à xOy, et les courbes (u), dans des plans parallèles entre eux et à O.x;

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIII, p. 106.

2^o Pour (S₁), les courbes (*u*), dans des plans parallèles à *xOy*, et les courbes (*v*), dans des plans parallèles entre eux et à *Ox*.

Les équations de (S) et de (S₁) pourront s'écrire

$$\begin{aligned}x &= U_0 + V_0, & x_1 &= U_1 + V_1, \\y &= U + mv, & y_1 &= V_2 + m_1 u, \\z &= v, & z_1 &= u.\end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que, si (S) et (S₁) sont applicables l'une sur l'autre, c'est-à-dire si l'on a

$$(3) \quad \begin{cases} U_0'^2 + U'^2 &= U_1'^2 + m_1^2 + 1, \\ V_0'^2 + m^2 + 1 &= V_1'^2 + V_2'^2, \\ U_0' V_0' + m U' &= U_1' V_1' + m_1 V_2', \end{cases}$$

les constantes *m* et *m*₁ sont nulles.

La troisième des équations (3), différenciée par rapport à *u* puis à *v*, donne

$$U_0'' V_0'' = U_1'' V_1''.$$

En laissant de côté les hypothèses $V_0'' = 0$, $U_1'' = 0$, qui donnent des cylindres, on a donc

$$\frac{U_0''}{U_1''} = \frac{V_1''}{V_0''} = a,$$

a désignant une constante, et en intégrant

$$(4) \quad \begin{cases} U_0 = a U_1 + b u, \\ V_1 = a V_0 + c v. \end{cases}$$

Ces expressions, substituées dans la dernière équation (3), fournissent

$$(5) \quad c U_1' - m U' = b V_0' - m_1 V_2' = g.$$

g étant une nouvelle constante arbitraire.

Si l'on suppose $m \neq 0$, il est facile de voir qu'il faut aussi faire $m_1 \neq 0$ pour éviter que les deux surfaces (S) et (S₁) soient des cylindres. On peut alors tirer de (4) et (5) les expressions de U_0' , U' , V_1' , V_2' en fonction de U_1' et de V_0' , et en les portant dans les

deux premières équations (3), on trouve

$$(aU_1 + b)^2 + \left(\frac{cU_1 - g}{m}\right)^2 = U_1'^2 + m_1^2 + 1.$$

$$(aV_0 + c)^2 + \left(\frac{bV_0 - g}{m_1}\right)^2 = V_0'^2 + m^2 + 1.$$

Si on laisse de côté les cylindres, ces relations doivent avoir lieu identiquement; de là les six équations

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{c^2}{m^2} &= 1, & a^2 + \frac{b^2}{m_1^2} &= 1, \\ ab - \frac{cg}{m^2} &= 0, & ac - \frac{bg}{m_1^2} &= 0, \\ b^2 + \frac{g^2}{m^2} &= m_1^2 + 1, & c^2 + \frac{g^2}{m_1^2} &= m^2 + 1. \end{aligned}$$

On en déduit sans peine

$$m_1^2 = m^2, \quad b^2 = c^2,$$

puis

$$g^2 = a^2 m^4 = m^2(m^2 - b^2) = m^2(m^2 - b^2) + m^2,$$

et, par conséquent,

$$m = m_1 = 0.$$

Réciproquement, si l'on suppose $m = m_1 = 0$, les équations de (S) et de (S₁) sont, aux notations près,

$$\begin{aligned} x &= U + V, & x_1 &= U_1 + V_1, \\ y &= u, & y_1 &= U_2, \\ z &= v, & z_1 &= V_2, \end{aligned}$$

et, pour que ces deux surfaces s'appliquent l'une sur l'autre, il suffit de prendre

$$\begin{aligned} U_1 &= aU, & U_2 &= \int \sqrt{(1-a^2)U'^2 + 1} \, du, \\ V_1 &= \frac{V}{a}, & V_2 &= \int \sqrt{\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)V'^2 + 1} \, dv. \end{aligned}$$

Quand $a = 1$, (S₁) coïncide avec (S); si a décroît de 1 à zéro ou croît de 1 à ∞ , (S₁) part de (S) et se déforme d'une manière continue sans que les courbes génératrices (u) et (v) cessent d'être planes et dans des plans rectangulaires.

Par exemple, si (S) est le paraboloïde

$$(6) \quad \begin{cases} x = \frac{u^2}{2p} + \frac{v^2}{2q}, \\ y = u, \\ z = v, \end{cases}$$

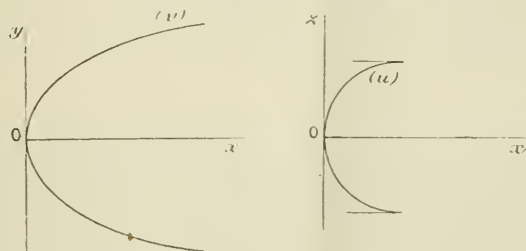
les équations de (S_1) seront

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = a \frac{u^2}{2p} + \frac{1}{a} \frac{v^2}{2q}, \\ y_1 = \int \sqrt{\left(1 - a^2\right) \frac{u^2}{p^2} + 1} du, \\ z_1 = \int \sqrt{\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \frac{v^2}{q^2} + 1} dv. \end{cases}$$

Les surfaces (1) et (2) sont un cas particulier des surfaces (6) et (7).

En ce qui concerne celles-ci, si $0 < a < 1$, (S_1) s'applique sur une zone du paraboloïde comprise entre deux plans parallèles à xOy et d'autant plus large que a est plus voisin de 1. Les courbes (v) tracées sur (S_1) sont de forme parabolique; les courbes (u) sont au contraire limitées (fig. 1 et 2); (S_1) est engendrée par (v)

Fig. 1 et 2.

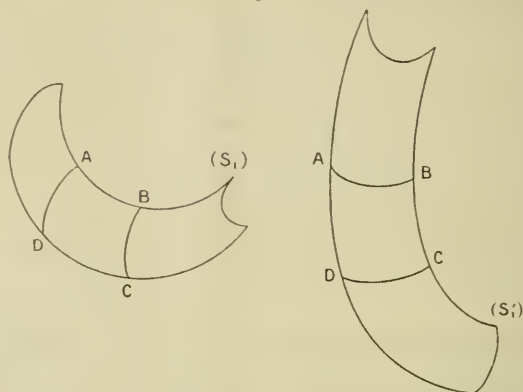


s'appuyant sur (u) , ou inversement. Si le paraboloïde est elliptique, les courbes (u) et (v) tournent leurs concavités dans le même sens par rapport à l'axe Ox ; s'il est hyperbolique, leurs concavités sont tournées en sens contraires.

Si a , qui était inférieur à 1, dépasse l'unité, les courbes (v) prennent la forme des courbes (u) et inversement, et (S_1) s'applique sur une zone du paraboloïde comprise entre deux plans parallèles à xOz .

Considérons la surface (S_1) qui correspond à une valeur a_1 de a comprise entre 0 et 1, et la surface (S'_1) qui correspond à la valeur $\frac{1}{a_1}$ de a ; (S_1) et (S'_1) sont applicables l'une sur l'autre dans une région limitée par un quadrilatère curviligne ABCD (fig. 3),

Fig. 3.



avec correspondance des deux systèmes de courbes génératrices (u) et (v) . Il est facile de voir que les (v) de (S_1) sont semblables aux (u) de (S'_1) avec rapport de similitude $\frac{p}{q}$, et que les (u) de (S_1) sont semblables aux (v) de (S'_1) avec rapport de similitude inverse $\frac{q}{p}$.

On a donc là l'exemple d'un réseau composé, dans chaque famille, de courbes égales, susceptible de se déformer de façon que les courbes de la première famille deviennent semblables aux courbes de la seconde avec un certain rapport de similitude k , et les courbes de la seconde semblables aux courbes de la première avec rapport de similitude $\frac{1}{k}$.

Les équations (7) constituent une solution, avec une constante arbitraire a , de la déformation du parabolôïde. Il est facile de trouver des surfaces formant une *intégrale complète* de ce problème, et même une intégrale contenant *sept* constantes arbitraires.

Supposons en effet que (S_1) , au lieu d'être une surface engendrée par la translation plane d'une courbe plane, soit engendrée par la translation quelconque d'une courbe quelconque; ses équations seront de la forme

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = U + V, \\ y_1 = U_1 + V_1, \\ z_1 = U_2 + V_2, \end{cases}$$

et elle sera applicable sur le parabolôïde (6) si l'on a

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{uv}{pq} = U'V' + U'_1V'_1 + U'_2V'_2, \\ \frac{u^2}{p^2} + 1 = U'^2 + U_1'^2 + U_2'^2, \\ \frac{v^2}{q^2} + 1 = V'^2 + V_1'^2 + V_2'^2. \end{cases}$$

La première de ces équations est vérifiée si l'on prend

$$(10) \quad \begin{cases} U_1 = \frac{au^2}{2p} + bU, \\ U_2 = \frac{cu^2}{2p} + gU, \\ \frac{v^2}{2q} = aV_1 + cV_2, \\ V = -bV_1 - gV_2, \end{cases}$$

a, b, c, g étant quatre constantes arbitraires; si l'on tire U_1, U_2, V_1, V_2 de ces quatre relations et qu'on les porte dans les deux dernières relations (9), on obtient U et V par des quadratures; les formules (10) donnent ensuite U_1, U_2, V_1, V_2 , et le système (8) définit alors une surface dépendant de quatre constantes arbitraires et applicable sur le parabolôïde.

Il n'y a plus qu'à opérer, suivant une remarque faite par Bour (1), une rotation des axes autour de l'origine pour introduire dans les équations de cette surface trois nouvelles constantes arbitraires.

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX^e Cahier.

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS
AUTOUR D'UN POINT FIXE;

Par M. G. Kobb.

Le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, dans le cas de forces autres que la pesanteur, a été très peu étudié. Il n'y a que le cas signalé par M. Darboux, dans une Note de la *Mécanique* de Despeyroux, où l'on ait réussi à intégrer les équations du mouvement. Dans ce cas, l'ellipsoïde central est de révolution et les surfaces de niveau sont des surfaces de révolution dont l'axe passe par le point fixe. Quand l'ellipsoïde central n'est pas de révolution, on ne peut pas, en général, intégrer les équations de mouvement, mais on en connaît trois intégrales, savoir : l'intégrale des forces vives, celle des aires et l'intégrale particulière des cosinus directeurs. M. F. de Brun ⁽¹⁾ a trouvé une forme spéciale de la fonction de force qui permet d'obtenir encore une intégrale, mais il n'a pas remarqué qu'on peut alors achever l'intégration. Je me propose ici d'indiquer la méthode à suivre, moins parce que le problème présente en lui-même beaucoup d'intérêt, que parce qu'elle est aussi applicable au problème beaucoup plus important où la force agissante est la pesanteur.

Soient $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trois axes rectangulaires fixes, dont l'origine est au point fixe. Dans le cas considéré par M. de Brun, la fonction de force a la forme

$$\frac{1}{2}k\xi^2 + \varphi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Soient Ox , Oy , Oz les axes mobiles et γ , γ' , γ'' les cosinus directeurs de l'axe de z ; les équations d'Euler seront, en employant les notations usuelles,

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C)(qr - k\gamma'\gamma''),$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A)(rp - k\gamma''\gamma'),$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B)(pq - k\gamma\gamma').$$

(1) *Académie des Sciences de Stockholm*, septembre 1893.

Ces équations, jointes aux trois suivantes

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma' r - \gamma'' q, \quad \frac{d\gamma'}{dt} = \gamma'' p - \gamma' r, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = \gamma' q - \gamma'' p,$$

déterminent les six inconnues $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$.

Le principe des forces vives donne l'intégrale

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + k(\gamma\gamma'^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) = k_1,$$

et celui des aires donne

$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = k_2.$$

On a, de plus,

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Enfin, M. de Brun a trouvé une quatrième intégrale, savoir

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - k(BC\gamma'^2 + CA\gamma''^2 + AB\gamma'^{\prime\prime 2}) = k_3.$$

Nous verrons qu'avec ces quatre intégrales on peut ramener le problème à des quadratures.

Remarquons d'abord que, si l'on met les équations différentielles sous la forme

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \quad \nu = 1, 2, \dots, 6,$$

on aura

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=6} \frac{\partial X_\nu}{\partial x_\nu} = 0.$$

Le système proposé admet, par conséquent, le multiplicateur $M = \text{const.} = 1$. Ainsi, nous pouvons obtenir une cinquième intégrale en employant le principe du dernier multiplicateur; et, en exprimant avec ces cinq intégrales cinq de nos variables en fonction d'une seule, nous aurons enfin le temps par une quadrature. Mais la cinquième intégrale n'étant pas très simple, il est mieux de procéder autrement. Introduisons, au lieu de $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$, les variables canoniques

$$\theta, \quad \varphi, \quad \psi; \quad \theta_1 = \frac{\partial T}{\partial \theta'}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad \psi_1 = \frac{\partial T}{\partial \psi'},$$

où θ, φ et ψ sont les angles d'Euler et T la demi-force vive; on

aura

$$\begin{aligned} p &= \psi' \sin \varphi \sin \theta + \theta' \cos \varphi, & \gamma &= \sin \varphi \sin \theta, \\ q &= \psi' \cos \varphi \sin \theta - \theta' \sin \varphi, & \gamma' &= \cos \varphi \sin \theta, \\ r &= \varphi' + \psi' \cos \theta; & \gamma'' &= \cos \theta; \end{aligned}$$

ou, en fonction de $\theta_1, \varphi_1, \psi_1$,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{A} \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (\psi_1 - \varphi_1 \cos \theta) + \theta_1 \cos \varphi \right], \\ q &= \frac{1}{B} \left[\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (\psi_1 - \varphi_1 \cos \theta) - \theta_1 \sin \varphi \right], \\ r &= \frac{\varphi_1}{C}. \end{aligned}$$

Avec les nouvelles variables, nos intégrales deviennent

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{A} \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (\psi_1 - \varphi_1 \cos \theta) + \theta_1 \cos \varphi \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{B} \left[\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (\psi_1 - \varphi_1 \cos \theta) - \theta_1 \sin \varphi \right]^2 + \frac{1}{C} \varphi_1^2 \\ &\quad + k [A \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + B \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta] = k_1, \\ H_2 &= \psi_1 = k_2, \\ H_3 &= \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (\psi_1 - \varphi_1 \cos \theta) + \theta_1 \cos \varphi \right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (\psi_1 - \varphi_1 \cos \theta) - \theta_1 \sin \varphi \right]^2 + \varphi_1^2 \\ &\quad - k [BC \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + CA \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + AB \cos^2 \theta] = k_3. \end{aligned} \right.$$

Nous observons d'abord que la variable ψ n'entre pas explicitement. Formons les parenthèses de Poisson

$$[H_1, H_2], \quad [H_1, H_3], \quad [H_2, H_3].$$

On voit tout de suite que la première et la troisième sont nulles. Quant à la seconde, elle doit être nulle, parce qu'elle est la condition nécessaire et suffisante pour que $(H_3 = k_3)$ soit une intégrale de notre système. Les trois parenthèses de Poisson étant nulles, si nous remplaçons les variables θ_1, φ_1 et ψ_1 par $\frac{\partial W}{\partial \theta}, \frac{\partial W}{\partial \varphi}$

et $\frac{\partial W}{\partial \psi}$, les trois équations aux dérivées partielles

$$H_1 \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}, \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{\partial W}{\partial \psi}, \theta, \varphi \right) = k_1,$$

$$H_2 = \frac{\partial W}{\partial \psi} = k_2,$$

$$H_3 \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}, \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{\partial W}{\partial \psi}, \theta, \varphi \right) = k_3$$

sont compatibles, et la solution commune sera

$$W = \int (\theta_1 d\theta + \varphi_1 d\varphi + \psi_1 d\psi),$$

où l'on a remplacé $\theta_1, \varphi_1, \psi_1$ par leurs valeurs en θ et φ données par les équations (3). L'expression

$$\theta_1 d\theta + \varphi_1 d\varphi + \psi_1 d\psi$$

est bien une différentielle exacte. Les équations (3) renferment trois constantes arbitraires, de sorte que W est une solution complète de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton et de Jacobi, et l'on aura la solution générale de notre système en différentiant W par rapport aux constantes k_1, k_2, k_3 .

L'équation $H_2 = k_2$ nous donne $\psi_1 = k_2$, de sorte qu'il vient

$$W = k_2 \psi + \int (\theta_1 d\theta + \varphi_1 d\varphi).$$

En substituant la valeur $\psi_1 = k_2$ dans les intégrales $H_1 = k_1$, $H_3 = k_3$, nous aurons deux équations du second degré en θ_1 et φ_1 , dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$. Éliminons φ_1 ; nous aurons une équation du quatrième degré en θ_1 et pour φ_1 une fonction rationnelle de θ_1 , $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$. Posons

$$\tan \frac{\theta}{2} = x, \quad \tan \frac{\varphi}{2} = y, \quad \theta_1 = z,$$

nous aurons

$$\varphi_1 = R(z, x, y), \quad f(z, x, y) = 0,$$

et enfin

$$(4) \quad W = k_2 \psi + \int \left[\frac{z}{1+x^2} dx + \frac{R(x, y, z)}{1+y^2} dy \right].$$

L'intégrale qui entre dans l'expression de W est une intégrale

de différentielle totale appartenant à la surface $f(x, y, z) = 0$.
Formons maintenant, d'après Jacobi, les intégrales de notre système canonique; on aura

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial k_1} = t + k'_1 = 2 \int \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial k_1}}{1+x^2} dx + \frac{\frac{\partial R}{\partial k_1}}{1+y^2} dy \right), \\ \frac{\partial W}{\partial k_2} = k'_2 = \frac{\psi}{2} + 2 \int \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial k_2}}{1+x^2} dx + \frac{\frac{\partial R}{\partial k_2}}{1+y^2} dy \right), \\ \frac{\partial W}{\partial k_3} = k'_3 = 2 \int \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial k_3}}{1+x^2} dx + \frac{\frac{\partial R}{\partial k_3}}{1+y^2} dy \right). \end{cases}$$

L'équation $f(x, y, z) = 0$, comme la fonction rationnelle R , renferme k_1 , k_2 et k_3 ; on aura donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial k_1} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial k_1} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial k_1} &= \left(\frac{\partial R}{\partial k_1} \right) + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial k_1} = \frac{\frac{\partial R}{\partial k_1} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial k_1}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \end{aligned}$$

et les formules analogues. Les dérivées partielles de z et de R , par rapport à k_1 , k_2 , k_3 , sont donc des fonctions rationnelles de x, y, z .

Par conséquent, nous pouvons écrire le système (5) de la façon suivante :

$$(6) \quad \begin{cases} t + k'_1 = \int [P_1(x, y, z) dx + Q_1(x, y, z) dy], \\ k'_3 = \int [P_3(x, y, z) dx + Q_3(x, y, z) dy], \\ \frac{\psi}{2} - k'_2 = \int [P_2(x, y, z) dx + Q_2(x, y, z) dy], \\ f(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

les P et les Q étant des fonctions rationnelles.

La solution générale de nos équations de mouvement est ainsi obtenue à l'aide de trois intégrales de différentielles totales attachées à la surface algébrique $f(x, y, z) = 0$. Il me semble que c'est la première fois que ces intégrales, introduites dans la science par M. Picard, se sont présentées dans l'étude d'un problème de Mécanique.

Passons maintenant au problème, beaucoup plus important, où la force agissante est la pesanteur. Avec les mêmes notations, les équations d'Euler sont

$$(A) \quad A \frac{dp}{dt} = (B - C) qr + Mg(y_0 \gamma'' - z_0 \gamma'),$$

$$(B) \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A) pr + Mg(z_0 \gamma' - x_0 \gamma''),$$

$$(C) \quad C \frac{dr}{dt} = (A - B) pq + Mg(x_0 \gamma' - y_0 \gamma''),$$

où M est la masse du corps et x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité. Les trois autres équations sont les mêmes qu'auparavant. On connaît les intégrales

$$H_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0 \gamma' + y_0 \gamma'' + z_0 \gamma''') = k_1,$$

$$H_2 = Ap\gamma' + Bq\gamma'' + Cr\gamma''' = k_2,$$

$$\gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma'''^2 = 1.$$

Dans un Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences au concours du prix Bordin pour l'année 1894, M. R. Liouville a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une autre intégrale algébrique $H_3 = k_3$. Cette intégrale une fois obtenue, nous pouvons achever l'intégration en employant la même méthode que je viens d'exposer.

En effet, après avoir introduit les angles d'Euler et les variables canoniques $\theta_1, \varphi_1, \psi_1$, nous aurons les trois intégrales

$$H_1 = k_1, \quad H_2 = \psi_1 = k_2, \quad H_3 = k_3,$$

qui sont, évidemment, telles que les expressions

$$[H_1, H_2], \quad [H_1, H_3], \quad [H_2, H_3]$$

sont identiquement nulles. Alors, il n'y a qu'à répéter le même raisonnement que ci-dessus et nous aurons la solution générale sous la forme (6), c'est-à-dire à l'aide de trois intégrales de différentielles totales attachées à une surface algébrique. On aura ainsi la solution du problème de la rotation d'un corps grave suspendu à un point fixe, dans le cas où il est possible d'obtenir la solution sous une forme finie.

SUR UN SYSTÈME DE COORDONNÉES TÉTRAÉDRIQUES;

Par M. V. SCHLEGEL.

M. d'Ocagne a étudié ⁽¹⁾ un système de coordonnées tétraédriques ponctuelles ou planes, très remarquable par le fait que l'on en déduit quatre systèmes connus, deux à deux réciproques, en rejetant à l'infini le *point fondamental* O ou le *plan fondamental* ABC du tétraèdre OABC. Il s'agit des coordonnées cartésiennes et plückeriennes d'une part, des coordonnées ponctuelles et tangentielles d'autre part.

Dans ce qui suit nous allons déduire ce système intéressant d'une méthode employée par Grassmann, pour représenter un point P ou un plan π à l'aide d'un tétraèdre OABC.

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres quelconques réels; on a, suivant cette méthode,

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta) P = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta O.$$

Soit a le point d'intersection du plan PBC et de l'arête OA, savoir le point qu'on peut déduire également des points O et A ou des points P, B, C. Ce point a est représenté doublement par l'équation

$$(2) \quad \alpha A + \delta O = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) P - \beta B - \gamma C$$

dérivée de (1). Donc on peut poser

$$(3) \quad (\alpha + \delta)a = \alpha A + \delta O,$$

d'où l'on tire, par des calculs bien connus,

$$(4) \quad \frac{O - a}{a - A} = \frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{O - b}{b - B} = \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{O - c}{c - C} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Pour trouver les deux dernières formules et le sens de b et c , il

(1) *Nouv. Annales de Mathém.*, série 3, t. XI, p. 70.

suffit de permuter circulairement, dans ce qui précède, les trois premières lettres des deux alphabets. Ajoutons que la différence de deux points représente leur distance en longueur et direction.

Enfin, si l'on pose

$$(5) \quad \alpha = \frac{x}{\lambda}, \quad \beta = \frac{y}{\mu}, \quad \gamma = \frac{z}{\nu}, \quad \delta = 1,$$

les équations (4) se changent en

$$(6) \quad x = \lambda \frac{O - a}{a - A}, \quad y = \mu \frac{O - b}{b - B}, \quad z = \nu \frac{O - c}{c - C}.$$

Ce sont les formules (1) de M. d'Ocagne, déterminant les coordonnées tétraédriques ponctuelles du point P.

2. Soient $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ des nombres quelconques réels; on a, suivant la même méthode,

$$(7) \quad (\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta')\pi = \alpha'(OBC) + \beta'(OCA) + \gamma'(OAB) + \delta'(BAC).$$

Il faut se rappeler que le produit *extérieur* (écrit entre crochets) de *deux* points représente le segment de droite compris entre eux, le produit de *trois* points le double de l'aire du triangle formé par eux, le produit de *quatre* points le sextuple du volume du tétraèdre formé par eux. S'il ne s'agit pas de grandeur, mais seulement de situation et direction, on peut remplacer le segment de droite par la droite entière et le triangle par son plan.

Soit a' le point d'intersection du plan π et de l'arête OA. Alors, pour représenter a' à l'aide de π et OA, nous posons

$$(8) \quad (OBGA) = 1,$$

ce qui donne à la multiplication extérieure le caractère spécial de multiplication *régressive*. En omettant un facteur numérique, qui sera ajouté plus tard, on a

$$(9) \quad a' \equiv [\pi(OA)],$$

ou, en ayant égard à l'équation (7),

$$a' \equiv \alpha'[(OBC)(OA)] + \delta'[(BAC)(OA)].$$

En appliquant les lois de la multiplication extérieure, savoir

$$[(ab)c] = (abc), \quad (ab) = -(ba),$$

on trouve

$$\alpha' \equiv -\alpha'[(OBCA)O] + \beta'[(OBCA)\Lambda],$$

ou, à cause de la relation (8),

$$(10) \quad \alpha' \equiv -\alpha'O + \beta'\Lambda.$$

Les autres produits tirant leur origine de (9) s'évanouissent en vertu de la loi $(aa) = 0$.

En égalant, comme il faut, les sommes de facteurs des deux membres, on écrira, au lieu de (10),

$$(11) \quad (\beta' - \alpha')\alpha' = \beta'\Lambda - \alpha'O;$$

d'où l'on tire

$$(12) \quad -\frac{\alpha' - \Lambda}{O - \alpha'} = \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad -\frac{\beta' - \Lambda}{O - \beta'} = \frac{\beta'}{\gamma'}, \quad -\frac{\gamma' - \Lambda}{O - \gamma'} = \frac{\gamma'}{\delta'}.$$

Enfin, si l'on pose

$$(13) \quad \alpha' = \lambda u, \quad \beta' = \mu v, \quad \gamma' = \nu w, \quad \delta' = 1,$$

les équations (12) se changent en

$$(14) \quad u = -\frac{1}{\lambda} \frac{\alpha' - \Lambda}{O - \alpha'}, \quad v = -\frac{1}{\mu} \frac{\beta' - \Lambda}{O - \beta'}, \quad w = -\frac{1}{\nu} \frac{\gamma' - \Lambda}{O - \gamma'}.$$

Ce sont là précisément les formules (2) de M. d'Ocagne, déterminant les coordonnées tétraédriques planes (tangentiellles) du plan π .

3. Pour que le point P soit situé dans le plan π , il faut que l'on ait

$$(15) \quad (\pi P) = 0,$$

ou, à cause des relations (1) et (7),

$$\alpha\alpha'(OBCA) + \beta\beta'(OCAB) + \gamma\gamma'(OABC) + \delta\delta'(BACO) = 0,$$

les autres produits s'évanouissant en vertu de la loi $(aa) = 0$. Les produits restants sont égaux entre eux en vertu de la loi

$(ab) = -(ba)$, parce qu'ils se réduisent à la même forme par un nombre pair de changements de facteurs juxtaposés. Donc il reste

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' = 0,$$

ou, en substituant les valeurs (5) et (13),

$$(16) \quad ux + v\gamma + w\delta + 1 = 0,$$

ce qui est l'équation (6) de M. d'Ocagne.

MÉMOIRE SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. PAUL ADAM.

Soient (τ) , (τ_1) deux surfaces applicables l'une sur l'autre. Les principaux points de ce Mémoire sont les suivants :

Je considère la surface (Σ) , lieu du milieu de la corde joignant deux points correspondants de (τ) et de (τ_1) , et la surface (Σ_1) , lieu de l'extrémité du vecteur parallèle à cette corde et égal à sa moitié.

Je forme d'abord l'équation aux dérivées partielles de (Σ_1) quand (Σ) est donnée.

Cette équation est beaucoup plus simple que l'équation des surfaces applicables sur une surface donnée; or (Σ) et (Σ_1) étant connues, (τ) et (τ_1) le sont également, car celles-ci ont, par rapport aux deux premières, la même définition que (Σ) et (Σ_1) par rapport à (τ) et (τ_1) . Par conséquent :

La détermination des couples de surfaces applicables tels que le lieu du milieu de la corde joignant deux points correspondants soit une surface donnée dépend d'une équation beaucoup plus simple que la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée.

J'établis, entre les rayons de courbure de (Σ) et (Σ_1) , une relation que l'on peut regarder comme l'analogue de la relation de Gauss pour les surfaces (τ) et (τ_1) et j'en déduis plusieurs théorèmes, parmi lesquels ceux-ci :

Tandis que (τ) et (τ_1) sont toujours toutes deux convexes ou toutes deux à courbures opposées aux points correspondants, (Σ) et (Σ_1) sont l'une convexe et l'autre à courbures opposées ou toutes deux à courbures opposées, mais jamais toutes deux convexes.

Si les extrémités m et m_1 d'une droite de longueur constante sont les points correspondants de deux surfaces (τ) , (τ_1) applicables l'une sur l'autre, le rapport des rayons de courbure principaux de la surface (Σ) , lieu du milieu de mm_1 (surface qui est toujours à courbures opposées) est égal à l'inverse du rapport des carrés des distances du point m , ou du point m_1 , aux directions principales de cette surface (Σ) .

Je m'occupe ensuite des couples (τ) , (τ_1) pour lesquels (Σ) est un cylindre. J'établis que, dans ce cas :

(τ) est une surface réglée quelconque et (τ_1) la surface réglée symétrique, par rapport à une droite quelconque, de la surface réglée applicable sur (τ) avec parallélisme des génératrices.

J'entre dans quelques considérations intéressantes relativement à ces couples (τ) , (τ_1) et à la surface (Σ_1) correspondante.

Je détermine enfin tous les couples (τ) , (τ_1) pour lesquels (Σ) est une quadrique.

Lorsque (Σ) est une quadrique dénuée de centre, je démontre que, parmi les couples (τ) , (τ_1) correspondants, se trouvent la surface minima d'Enneper et son adjointe :

La surface minima d'Enneper et son adjointe peuvent être orientées de manière que le lieu du milieu de la corde joignant deux points correspondants soit un paraboloïde hyperbolique équilatère.

Le cas où (Σ) est une quadrique à centre se ramène très simplement à la recherche des couples de surfaces applicables avec invariabilité de la distance des points correspondants, couples étudiés par Ribaucour.

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA SURFACE (Σ_1) .

Soient, en coordonnées rectangulaires, x, y, z ; x_1, y_1, z_1 ; X, Y, Z ; X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées respectives des surfaces (τ) , (τ_1) , (Σ) , (Σ_1) .

On a

$$(1) \quad \begin{cases} x = X + X_1, & x_1 = X - X_1, \\ y = Y + Y_1, & y_1 = Y - Y_1, \\ z = Z + Z_1, & z_1 = Z - Z_1. \end{cases}$$

Si l'on prend X et Y comme variables indépendantes, les conditions pour que (τ) et (τ_1) s'appliquent l'une sur l'autre sont

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0, \\ \frac{\partial X_1}{\partial Y} + \frac{\partial Y_1}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial Z_1}{\partial X} = 0. \end{cases}$$

Il est facile d'éliminer les deux fonctions X_1 et Y_1 entre ces trois équations.

En égalant d'abord les deux expressions de $\frac{\partial^2 X_1}{\partial X \partial Y}$ tirées de la première et de la troisième, on trouve

$$(3) \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} = 0.$$

La seconde des équations (2) différenciée ensuite par rapport à X donne

$$(4) \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Y} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X \partial Y} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à égaliser les deux expressions de $\frac{\partial^3 Y_1}{\partial X^2 \partial Y}$ tirées des équations (3) et (4) pour obtenir l'équation suivante entre les fonctions Z et Z_1 ,

$$(5) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} = 0.$$

Si la surface (Σ) est donnée, la fonction $Z(X, Y)$ est connue,

et l'équation (5) définit la fonction $Z_1(X, Y)$; les équations (3) et (4) donnent ensuite les deux dérivées de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$; on obtient par suite $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$ par deux quadratures; l'équation (4) exprime alors que cette valeur de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$ et que l'expression de $\frac{\partial Y_1}{\partial Y}$ tirée de la seconde des équations (2) sont les dérivées d'une même fonction Y_1 : d'où Y_1 par deux nouvelles quadratures; enfin, en vertu de l'équation (3), la première et la dernière des équations (2) font connaître pour $\frac{\partial X_1}{\partial Y}$ et $\frac{\partial X_1}{\partial X}$ les deux dérivées d'une même fonction X_1 , laquelle se calcule par deux dernières quadratures.

En résumé, l'équation (5) est l'équation aux dérivées partielles de la surface (Σ_1) quand (Σ) est donnée, et, en supposant que la fonction (Z_1) ait été déterminée, six quadratures définissent, au moyen des relations (1), les coordonnées des deux surfaces (τ) et (τ_1) applicables l'une sur l'autre.

RELATION ENTRE LES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX DES DEUX SURFACES (Σ) ET (Σ_1) AUX POINTS CORRESPONDANTS.

Appelons P, Q, R, S, T les dérivées de la fonction $Z(X, Y)$, et P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 les dérivées de la fonction $Z_1(X_1, Y_1)$.

Les équations (2) s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial X} + P \frac{\partial Z_1}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial Y_1}{\partial Y} + Q \frac{\partial Z_1}{\partial Y} &= 0, \\ \frac{\partial X_1}{\partial Y} + \frac{\partial Y_1}{\partial X} + P \frac{\partial Z_1}{\partial Y} + Q \frac{\partial Z_1}{\partial X} &= 0.\end{aligned}$$

Joignons-y les identités

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_1}{\partial X} &= P_1 \frac{\partial X_1}{\partial X} + Q_1 \frac{\partial Y_1}{\partial X}, \\ \frac{\partial Z_1}{\partial Y} &= P_1 \frac{\partial X_1}{\partial Y} + Q_1 \frac{\partial Y_1}{\partial Y}.\end{aligned}$$

En combinant ces cinq équations, on les remplace par celles-ci

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial X} = -P \frac{\partial Z_1}{\partial X}, & \frac{\partial Y_1}{\partial X} = \frac{1 + PP_1}{Q_1} \frac{\partial Z_1}{\partial X}, \\ \frac{\partial X_1}{\partial Y} = \frac{1 + QQ_1}{P_1} \frac{\partial Z_1}{\partial Y}, & \frac{\partial Y_1}{\partial Y} = -Q \frac{\partial Z_1}{\partial Y}, \\ (1 + PP_1 + QQ_1) \left(P_1 \frac{\partial Z_1}{\partial X} + Q_1 \frac{\partial Z_1}{\partial Y} \right) = 0. \end{cases}$$

La dernière se décompose en deux.

Première hypothèse :

$$1 + PP_1 + QQ_1 = 0.$$

Les normales aux deux surfaces (Σ) , (Σ_1) aux points correspondants sont alors rectangulaires. C'est là un cas très particulier, dont l'examen est facile, et qui conduit au résultat suivant (je me borne à l'énoncer en raison de son peu d'intérêt) :

Pour que les deux surfaces (Σ) et (Σ_1) aient leurs normales rectangulaires aux points correspondants, il faut et il suffit que (σ) et (σ_1) soient deux cylindres parallèles quelconques regardés comme applicables l'un sur l'autre génératrice par génératrice. (Σ) et (Σ_1) sont alors deux cylindres parallèles à (σ) et (σ_1) ⁽¹⁾.

(1) Si l'on coupe les quatre cylindres (σ) , (σ_1) , (Σ) , (Σ_1) par un plan perpendiculaire à leurs génératrices et si (γ) , (γ_1) , (Γ) , (Γ_1) sont les sections droites obtenues, on peut donc dire :

Soient (γ) et (γ_1) deux courbes planes se correspondant point m par point m_1 , (Γ) le lieu du milieu M de la corde mm_1 , (Γ_1) le lieu de l'extrémité M_1 du vecteur parallèle à la corde mm_1 et égal à sa moitié; *pour que les normales aux courbes (Γ) , (Γ_1) aux points correspondants soient rectangulaires, il faut et il suffit que les arcs correspondants de (γ) et de (γ_1) soient égaux.*

En particulier, si (Γ_1) est un cercle dont les vecteurs sont issus du centre, (γ) et (γ_1) constituent les lieux des points m et m_1 obtenus en prenant sur les tangentes à (Γ) , à partir et de chaque côté du point M de contact deux longueurs égales et constantes; ainsi :

Étant donnée une courbe quelconque (Γ) , les lieux (γ) et (γ_1) des points m et m_1 obtenus en prenant sur les tangentes à (Γ) , à partir et de chaque côté du point M de contact, deux longueurs constantes égales à l , sont tels que deux cordes égales à $2l$ et s'appuyant chacune sur (γ) et sur (γ_1) laissent entre leurs extrémités correspondantes des arcs égaux.

Seconde hypothèse :

$$P_1 \frac{\partial Z_1}{\partial X} + Q_1 \frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0.$$

On a alors, en écrivant à nouveau les quatre premières équations (6),

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial X} = -P \frac{\partial Z_1}{\partial X}, & \frac{\partial Y_1}{\partial X} = \frac{1+PP_1}{Q_1} \frac{\partial Z_1}{\partial X}, \\ \frac{\partial X_1}{\partial Y} = \frac{1+QQ_1}{P_1} \frac{\partial Z_1}{\partial Y}, & \frac{\partial Y_1}{\partial Y} = -Q \frac{\partial Z_1}{\partial Y}, \\ P_1 \frac{\partial Z_1}{\partial X} + Q_1 \frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0. \end{cases}$$

Si l'on écrit que

$$\frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial X_1}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X_1}{\partial Y}, \quad \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial Y_1}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial Y_1}{\partial Y},$$

on obtient, en tenant compte des équations (7), une seule et même équation qui est la suivante

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & P_1 Q_1 (1+PP_1+QQ_1) \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X \partial Y} \\ & + [PQ_1(1+QQ_1)R_1 - (1+PP_1+QQ_1+2PP_1QQ_1)S_1 \\ & \quad + QP_1(1+PP_1)T_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \right.$$

Différentiant ensuite la dernière des équations (7) par rapport à X et à Y, on obtient les deux équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & P_1 Q_1 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} + Q_1^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X \partial Y} + [-PQ_1 R_1 + (1+PP_1)S_1] \left(\frac{\partial Z_1}{\partial X} \right)^2 \\ & \quad + [-PQ_1 S_1 + (1+PP_1)T_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0, \\ & P_1^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X \partial Y} + P_1 Q_1 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} + [(1+QQ_1)R_1 - QP_1 S_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} \\ & \quad + [(1+QQ_1)S_1 - QP_1 T_1] \left(\frac{\partial Z_1}{\partial Y} \right)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

En résolvant les trois équations (8) et (9) par rapport aux trois dérivées secondes de Z_1 relativement à X et Y, on trouve l'équa-

tion (8) elle-même et les deux ci-après

$$10) \left\{ \begin{aligned} & P_1^2 Q_1 (1 + PP_1 + QQ_1) \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} \\ & + P_1 (1 + PP_1 + QQ_1) [-PQ_1 R_1 + (1 + PP_1) S_1] \left(\frac{\partial Z_1}{\partial X} \right)^2 \\ & + [-PQ_1^2 (1 + QQ_1) R_1 \\ & + (1 + PP_1) (1 - PP_1 + QQ_1) Q_1 S_1 + (1 + PP_1)^2 P_1 T_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0, \\ & P_1 Q_1^2 (1 + PP_1 + QQ_1) \frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} \\ & + Q_1 (1 + PP_1 + QQ_1) [(1 + QQ_1) S_1 - QP_1 T_1] \left(\frac{\partial Z_1}{\partial Y} \right)^2 \\ & + [(1 + QQ_1)^2 Q_1 R_1 \\ & + (1 + QQ_1) (1 + PP_1 - QQ_1) P_1 S_1 - QP_1^2 (1 + PP_1) T_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on porte enfin les trois dérivées secondes de Z_1 par rapport à X et à Y définies par les équations (8) et (10) dans l'équation (5), on arrive, entre les dérivées de Z par rapport à X et Y et celles de Z_1 par rapport à X_1 et Y_1 , à la relation suivante qui ne contient plus que les dérivées premières de Z_1 par rapport à X et Y

$$\begin{aligned} & P_1 R \left\{ Q_1 (1 + PP_1 + QQ_1) [(1 + QQ_1) S_1 - QP_1 T_1] \left(\frac{\partial Z_1}{\partial Y} \right)^2 \right. \\ & + [(1 + QQ_1)^2 Q_1 R_1 \\ & + (1 + QQ_1) (1 + PP_1 - QQ_1) P_1 S_1 - QP_1^2 (1 + PP_1) T_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} \left. \right\} \\ & - 2 P_1 Q_1 S [PQ_1 (1 + QQ_1) R_1 \\ & - (1 + PP_1 + QQ_1 + 2 PP_1 QQ_1) S_1 + QP_1 (1 + PP_1) T_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} \\ & + Q_1 T \left\{ P_1 (1 + PP_1 + QQ_1) [-PQ_1 R_1 + (1 + PP_1) S_1] \left(\frac{\partial Z_1}{\partial X} \right)^2 \right. \\ & + [-PQ_1^2 (1 + QQ_1) R_1 \\ & + (1 + PP_1) (1 - PP_1 + QQ_1) Q_1 S_1 + (1 + PP_1)^2 P_1 T_1] \frac{\partial Z_1}{\partial X} \frac{\partial Z_1}{\partial Y} \left. \right\} = 0. \end{aligned}$$

Cette équation étant homogène par rapport aux dérivées premières de Z_1 relativement à X et Y , on peut, en vertu de la dernière des équations (7), y remplacer ces dérivées respectivement par Q_1 et $-P_1$. On obtient alors, toutes réductions faites, l'équation symétrique suivante entre les dérivées P, Q, R, S, T de Z par rapport à X et Y et les dérivées P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 de Z_1 par

rapport à X_1 et Y_1

$$(11) \quad \begin{cases} (Q^2R - 2PQS + P^2T)(Q_1^2R_1 - 2P_1Q_1S_1 + P_1^2T_1) \\ \quad + 2(QR - PS)(Q_1R_1 - P_1S_1) \\ \quad + 2(QS - PT)(Q_1S_1 - P_1T_1) \\ \quad + RR_1 + 2SS_1 + TT_1 = 0, \end{cases}$$

Cette équation a été établie indépendamment du choix des axes de coordonnées. On peut donc, pour en dégager la signification géométrique, adopter des axes particuliers : prenons alors pour axes des X et des Y les tangentes MX , MY aux lignes de courbure de la surface (Σ) , et pour axe des Z la normale MZ à cette surface : cela revient à faire

$$P = Q = S = 0,$$

et l'équation (11) se réduit à

$$(12) \quad RR_1 + TT_1 = 0 \quad (1).$$

Appelons ρ et ρ' les rayons de courbure principaux de (Σ) au point M , estimés positivement suivant MZ . On a

$$(13) \quad R = \frac{1}{\rho}, \quad T = \frac{1}{\rho'}.$$

Soient M_1X_1 , M_1Y_1 les directions principales, et M_1A_1 , $M_1A'_1$ les directions asymptotiques de (Σ_1) au point M_1 qui correspond au point M . Si l'on considère les cosinus définis par le Tableau suivant

	MX	MY
M_1X_1	α	β
M_1Y_1	α'	β'
M_1A_1	α_1	β_1
$M_1A'_1$	α'_1	β'_1

(1) Il n'était pas nécessaire, pour obtenir ce résultat, de former l'équation (11);

les deux rapports $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ et $\frac{\beta'_1}{\alpha'_1}$ sont les racines de l'équation

$$R_1 \alpha_1^2 + 2 S_1 \alpha_1 \beta_1 + T_1 \beta_1^2 = 0.$$

On a en conséquence

$$(14) \quad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\beta_1 \beta'_1}{\alpha_1 \alpha'_1}.$$

Mais si θ_1 est l'angle $N_1 M_1 A_1$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \cos \theta_1 + \alpha' \sin \theta_1, & \alpha'_1 &= \alpha \cos \theta_1 - \alpha' \sin \theta_1, \\ \beta_1 &= \beta \cos \theta_1 + \beta' \sin \theta_1, & \beta'_1 &= \beta \cos \theta_1 - \beta' \sin \theta_1, \end{aligned}$$

ce qui transforme la relation (14) en

$$(15) \quad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\beta^2 \cot^2 \theta_1 - \beta'^2}{\alpha^2 \cot^2 \theta_1 - \alpha'^2}.$$

Enfin, en appelant ρ_1 et ρ'_1 les rayons de courbure principaux de (Σ_1) au point M_1 , on sait que, en grandeur et en signe,

$$(16) \quad \cot^2 \theta_1 = - \frac{\rho_1}{\rho'_1}.$$

Eu égard aux relations (13), (15) et (16), l'équation (12) se transforme, en définitive, en la suivante :

$$(17) \quad - \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\beta^2 \frac{\rho_1}{\rho'_1} + \beta'^2}{\alpha^2 \frac{\rho_1}{\rho'_1} + \alpha'^2},$$

ou bien

$$(18) \quad \alpha^2 \rho \rho_1 + \alpha'^2 \rho \rho'_1 + \beta^2 \rho' \rho_1 + \beta'^2 \rho' \rho'_1 = 0.$$

C'est la relation cherchée entre les rayons de courbure principaux des deux surfaces (Σ) et (Σ_1) .

La relation (18) montre que $\frac{\rho}{\rho'}$ et $\frac{\rho_1}{\rho'_1}$ ne peuvent pas être tous deux positifs.

De là ce théorème :

Tandis que les deux surfaces (σ) et (σ_1) , applicables l'une sur l'autre, sont toujours toutes deux convexes ou toutes deux à courbures opposées aux points correspondants, les deux sur-

on pouvait faire tout de suite $P = Q = S = 0$ dans les équations (8) et (9); mais l'équation (11), en raison de sa symétrie, sert de vérification au calcul.

faces (Σ) et (Σ_1) sont l'une convexe et l'autre à courbures opposées ou toutes deux à courbures opposées, mais jamais toutes deux convexes.

Supposons que l'une des deux surfaces (Σ) , (Σ_1) , par exemple (Σ) , soit une développable; en supposant que la direction principale MX soit celle de la génératrice, on a

$$\rho = \infty$$

et l'équation (18) se réduit à

$$(19) \quad x^2 \rho_1 + x'^2 \rho'_1 = 0.$$

La surface (Σ_1) est donc toujours à courbures opposées.

Menons, dans le plan tangent $X_1 M_1 Y_1$ à (Σ_1) , la parallèle $M_1 G_1$ à la projection de la génératrice MX sur ce plan, et soit λ l'angle $X_1 M_1 G_1$; on a

$$\frac{x'}{x} = \tan \lambda,$$

et par suite, en vertu des relations (16) et (19),

$$-\frac{\rho_1}{\rho'_1} = \tan^2 \lambda = \cot^2 \theta_1, \\ \lambda = \frac{\pi}{2} \pm \theta_1.$$

Par conséquent :

Quand l'une des surfaces (Σ) , (Σ_1) est une développable, (Σ) par exemple, l'autre (Σ_1) est toujours à courbures opposées; la projection de la génératrice de la première (Σ) sur le plan tangent à la seconde (Σ_1) fait, avec l'une quelconque des directions principales de cette dernière surface, un angle aigu égal aux angles aigus de la seconde direction principale de (Σ_1) avec les directions asymptotiques de cette même surface.

Supposons maintenant que (Σ_1) soit une sphère, c'est-à-dire que (τ) et (τ_1) soient applicables l'une sur l'autre avec invariabilité de la distance des points correspondants m et m_1 ⁽¹⁾.

On a alors

$$\rho_1 = \rho'_1,$$

(1) Le cas où c'est (Σ) qui est une sphère se ramène à ce cas-là en remplaçant (τ_1) par sa symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

et la relation (18) devient

$$\varphi(x^2 + x'^2) + \varphi'(\beta^2 + \beta'^2) = 0.$$

En appelant μ et μ' les angles de la normale à la sphère (Σ_1) , ou de la corde mm_1 , qui lui est parallèle, avec les directions principales MX et MY de (Σ) , on a

$$x^2 + x'^2 = \sin^2 \mu,$$

$$\beta^2 + \beta'^2 = \sin^2 \mu',$$

et, par suite,

$$\varphi \sin^2 \mu + \varphi' \sin^2 \mu' = 0,$$

ou bien, en appelant δ et δ' les distances du point m de (τ) , ou du point m_1 de $(\tau)_1$ aux directions principales MX et MY de (Σ) , et en prenant φ et φ' en valeur absolue

$$\varphi \delta^2 = \varphi' \delta'^2.$$

De là ce théorème :

Si les extrémités m et m_1 d'une droite de longueur constante sont les points correspondants de deux surfaces (τ) , (τ_1) applicables l'une sur l'autre, le rapport des rayons de courbure de la surface (Σ) , lieu du milieu de mm_1 (surface qui est toujours à courbures opposées) est égal à l'inverse du rapport des carrés des distances du point m , ou du point m_1 , aux directions principales de cette surface (Σ) .

CAS OU L'UNE DES SURFACES (Σ) , (Σ_1) EST UN PLAN.

Dans ce cas, on arrive très facilement aux théorèmes suivants :

Pour que la surface (Σ) soit un plan, il faut et il suffit que les deux surfaces (τ) , (τ_1) , applicables l'une sur l'autre, soient égales.

Pour que la surface (Σ_1) soit un plan, il faut et il suffit que les deux surfaces (τ) , (τ_1) soient symétriques par rapport à un point.

Ces théorèmes sont très utiles quand on a besoin de s'assurer que deux surfaces applicables l'une sur l'autre ne sont ni égales, ni symétriques.

CAS OU L'UNE DES SURFACES (Σ) , (Σ_1) EST UN CYLINDRE.

Supposons que la surface (Σ) soit le cylindre

$$(20) \quad Z = F(X),$$

parallèle à l'axe des Y ⁽¹⁾.

Si l'on porte l'expression ci-dessus de Z dans l'équation (5), on obtient

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} = 0,$$

ce qui exige que

$$Z_1 = Y f(X) + \varphi(X).$$

Les équations (3) et (4) donnent ensuite

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} = -F'' f, \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X \partial Y} = 0,$$

et, conséquemment,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X} = - \int F'' f dX.$$

On tire maintenant de la seconde des équations (2)

$$\frac{\partial Y_1}{\partial Y} = 0,$$

ce qui, rapproché de la valeur ci-dessus de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$, conduit à

$$Y_1 = - \int dX \int F'' f dX.$$

Enfin, d'après la première et la dernière des équations (2), on a

$$\frac{\partial X_1}{\partial X} = -(Y f' + \varphi') F', \quad \frac{\partial X_1}{\partial Y} = - \int F' f' dX$$

et, en intégrant,

$$X_1 = - Y \int F' f' dX - \int F' \varphi' dX.$$

En résumé, la surface (Σ_1) est définie par

$$(21) \quad \begin{cases} X_1 = - Y \int F' f' dX - \int F' \varphi' dX, \\ Y_1 = - \int dX \int F'' f dX, \\ Z_1 = Y F + \varphi, \end{cases}$$

(1) Le cas où (Σ_1) serait un cylindre se ramène au cas dans lequel (Σ) est cy-

expressions qui sont linéaires par rapport à Y , et, d'après les relations (1), les surfaces (τ) et (τ_1) ont pour équations

$$(22) \quad \begin{cases} x, x_1 = \mp Y \int F' f' dX + X \mp \int F' \varphi' dX, \\ y, y_1 = Y \mp \int dX \int F'' f dX. \\ z, z_1 = \pm Y f + F \pm \varphi, \end{cases}$$

les signes supérieurs se rapportant à (τ) et les signes inférieurs à (τ_1) ; ces équations sont également linéaires par rapport à Y .

On lit immédiatement sur les équations (21) et (22) les résultats ci-après :

(τ) est une surface réglée; (τ_1) est la surface réglée symétrique par rapport à l'axe des Y , c'est-à-dire à la direction des génératrices du cylindre (Σ) , de la surface réglée applicable sur (τ) avec parallélisme des génératrices correspondantes. (Σ_1) est une surface réglée admettant un plan directeur perpendiculaire aux génératrices de (Σ) . Les génératrices se correspondent sur les quatre surfaces (τ) , (τ_1) , (Σ) et (Σ_1) .

(τ) est la surface réglée la plus générale. En effet, les équations (22) montrent que le cône directeur dépend de deux seulement, F et f , des trois fonctions arbitraires F , f et φ ; d'autre part, si l'on calcule le paramètre de distribution π de (τ) , on trouve

$$\pi = \frac{1}{f'} \left[1 + f^2 + \left(\int F' f' dX \right)^2 \right];$$

ce paramètre ne dépend donc également que de F et de f ; on peut, en conséquence, se donner arbitrairement le cône directeur et le paramètre de distribution de (τ) et la surface dépend encore d'une fonction arbitraire φ , comme cela a lieu quand elle est la plus générale possible.

Étant données deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices, il est facile de reconnaître que la symétrique de l'une d'elles par rapport à une direction quelconque

lindrique en remplaçant (τ_1) par sa symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. En général, du reste, cette opération permet de ramener le cas où (Σ_1) est une surface donnée quelconque au cas où c'est (Σ) qui est cette surface.

forme avec l'autre un couple pour lequel la surface (Σ) est un cylindre.

Mais le calcul précédent montre que c'est là le seul couple pour lequel (Σ) soit un cylindre. Ce même calcul donne d'ailleurs une forme simple pour les équations du couple le plus général de surfaces réglées applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices; ce sont les équations (22) où l'on changerait le signe des expressions de x_1 et de z_1 , c'est-à-dire

$$(23) \quad \begin{cases} x, x_1 = -Y \int F' f' dX \pm X - \int F' \varphi' dX, \\ y, y_1 = Y \mp \int dX \int F'' f dX, \\ z, z_1 = Y f \pm F + \varphi, \end{cases}$$

en désignant par x'_1 et z'_1 les valeurs de x_1 et de z_1 changées de signe, et en affectant comme précédemment les signes supérieurs à (τ) .

Il existe des relations intéressantes entre la surface (Σ_1) et les surfaces (τ) et (τ_1) définies par les équations (21) et (22).

En premier lieu, le calcul montre que la ligne de striction est, sur chacune de ces trois surfaces, définie par la même relation

$$Y = -\frac{\varphi'}{f'}.$$

Par conséquent *les lignes de striction se correspondent sur les trois surfaces (τ) , (τ_1) et (Σ_1)* (elles devaient nécessairement se correspondre sur (τ) et (τ_1) qui sont applicables l'une sur l'autre).

Si l'on calcule ensuite le paramètre de distribution ϖ_1 de (Σ_1) , on trouve

$$\varpi_1 = \frac{1}{f'} \left[f^2 + \left(\int F' f' dX \right)^2 \right],$$

expression qui, rapprochée de la valeur obtenue ci-dessus pour ϖ , conduit à la relation

$$\frac{\varpi_1}{\varpi} = 1 - \frac{1}{1 + f^2 + \left(\int F' f' dX \right)^2};$$

or, si β est l'angle de la génératrice de (τ) ou de (τ_1) avec l'axe des Y , c'est-à-dire avec les génératrices de (Σ) , les équations (22)

de (σ) et de (τ_1) donnent

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + f^2 + \left(\int f' f' dX \right)};$$

on a donc

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} = 1 - \cos^2 \beta,$$

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \sin^2 \beta;$$

on peut donc, en remarquant que β est le demi-angle des génératrices de (σ) et de (τ_1) , énoncer le théorème suivant :

Si deux surfaces réglées (σ) , (τ_1) , applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices, sont disposées de telle sorte que le lieu (Σ) du milieu de la corde joignant deux points correspondants soit un cylindre, le lieu (Σ_1) de l'extrémité du vecteur parallèle à cette corde et égal à sa moitié est une surface réglée à plan directeur; le rapport des paramètres de distribution de (Σ_1) et de (σ) ou de (τ_1) est égal au carré du sinus du demi-angle des génératrices de (σ) et de (τ_1) .

Supposons, en particulier, que (Σ) soit un cylindre parabolique

$$Z = \frac{a}{2} X^2,$$

c'est-à-dire que

$$F(X) = \frac{a}{2} X^2.$$

Dans ce cas, il est facile de faire disparaître les intégrales des équations (23); il suffit de remplacer f et φ par une dérivée seconde f'' et une dérivée première φ' et d'employer l'intégration par parties; on obtient

$$x, x_1 = aY(f' - Xf'') \pm X + a(\varphi - X\varphi'),$$

$$y, y_1 = Y \mp af,$$

$$z, z_1 = Yf'' \pm \frac{a}{2} X^2 + \varphi'.$$

Il suffit alors de prendre pour f et φ deux fonctions algébriques quelconques pour obtenir deux surfaces réglées algébriques applicables avec parallélisme des génératrices.

Cette remarque n'est pas sans intérêt, car, étant donnée une

surface réglée algébrique, il n'y a aucune raison pour que la surface réglée applicable sur celle-ci avec parallélisme des génératrices soit elle-même algébrique; par exemple, si la première surface est un hyperboloïde de révolution, on sait que la seconde est un hélicoïde réglé, c'est-à-dire *une surface transcendante*.

CAS OÙ LA SURFACE (Σ) EST UNE QUADRIQUE DÉNUÉE DE CENTRE.

L'équation de la surface (Σ) peut alors s'écrire

$$(24) \quad Z = m^2 X^2 - n^2 Y^2,$$

m et n désignant deux constantes réelles ou purement imaginaires.

En portant d'abord l'expression (24) de Z dans l'équation (5), on voit que la fonction $Z_1(X, Y)$ doit satisfaire à l'équation

$$n^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} - m^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} = 0;$$

il en résulte pour Z_1 l'expression

$$Z_1 = f'(mX + nY) + \varphi'(mX - nY),$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires et f' , φ' désignant les dérivées de ces fonctions par rapport à leurs arguments respectifs.

Les équations (3) et (4) donnent ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} &= -2m^2 n(f'' - \varphi'') + 2m^2 n^2 Y(f''' + \varphi'''), \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X \partial Y} &= 2mn^3(f''' - \varphi'''), \end{aligned}$$

et, par intégration,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X} = 2mn^2 Y(f'' + \varphi'') - 2mn(f' - \varphi'),$$

en négligeant une constante que l'on peut supposer contenue dans f' ou dans φ' .

On tire maintenant de la seconde des équations (2)

$$\frac{\partial Y_1}{\partial Y} = 2n^3 Y(f'' - \varphi''),$$

expression qui, rapprochée de la valeur ci-dessus de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$, conduit à

$$Y_1 = 2n^2 Y (f' + \varphi') - 2n (f - \varphi).$$

Enfin, d'après la première et la dernière des équations (2), on a

$$\frac{\partial X_1}{\partial X} = -2m^3 X (f'' + \varphi''),$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial Y} = -2m^2 n X (f'' - \varphi'') + 2mn (f' - \varphi'),$$

et, en intégrant,

$$X_1 = -2m^2 X (f' + \varphi') + 2m (f + \varphi).$$

La surface (Σ_1) est, en définitive, représentée par les équations

$$(25) \quad \begin{cases} X_1 = 2m (f + \varphi) - 2m^2 X (f' + \varphi'), \\ Y_1 = -2n (f - \varphi) + 2n^2 Y (f' - \varphi'), \\ Z_1 = f' + \varphi', \end{cases}$$

et, en vertu des relations (1), les surfaces (τ) et (τ_1) ont pour équations

$$(26) \quad \begin{cases} x, x_1 = \pm 2m (f + \varphi) \mp 2m^2 X (f' + \varphi') + X, \\ y, y_1 = \mp 2n (f - \varphi) \pm 2n^2 Y (f' - \varphi') + Y, \\ z, z_1 = \pm (f' + \varphi') + m^2 X^2 - n^2 Y^2, \end{cases}$$

les signes supérieurs se rapportant à (τ) et les signes inférieurs à (τ_1) .

Pour faire une application des équations (26), prenons

$$f = \frac{1}{6} (mX + nY)^3,$$

$$\varphi = -\frac{1}{6} (mX - nY)^3,$$

puis

$$m^2 = n^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les surfaces (Σ) et (Σ_1) , qui ont en général les équations (24)

et (25), ont ici pour équations

$$\begin{cases} Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^2 - Y^2), \\ X_1 = -X^2 Y + \frac{Y^3}{3}, \\ Y_1 = XY^2 - \frac{X^3}{3}, \\ Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} XY. \end{cases}$$

On voit que (Σ) est un parabolôïde hyperbolique équilatère.

Donnons maintenant au système d'axes OX, OY une rotation autour de l'origine, dans le plan XOY , à l'aide des formules de transformation

$$\begin{aligned} X &= X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha, \\ Y &= X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha, \end{aligned}$$

et prenons pour α l'un des angles définis par

$$\cos 2\alpha = -\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On trouve que les deux surfaces (Σ) et (Σ_1) ont pour équation, avec les nouvelles coordonnées X', Y', Z et X'_1, Y'_1, Z_1 , en supprimant les accents

$$\begin{cases} Z = \frac{X^2}{2} + XY - \frac{Y^2}{2}, \\ X_1 = -XY^2 + \frac{X^3}{3}, \\ Y_1 = -X^2Y + \frac{Y^3}{3}, \\ Z_1 = -\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2}. \end{cases}$$

Pour obtenir les équations de (τ) et de (τ_1) , il suffit d'appliquer les relations (1) à ces nouvelles coordonnées, car le changement d'axes n'a pas modifié les relations géométriques qui existent entre les quatre surfaces $(\tau), (\tau_1), (\Sigma), (\Sigma_1)$; on trouve ainsi, en continuant de désigner par x, y, z, x_1, y_1, z_1 les coordonnées de (τ) et (τ_1) après le changement d'axes

$$(27) \quad \begin{cases} x = X - XY^2 + \frac{X^3}{3}, & x_1 = X + XY^2 - \frac{X^3}{3}, \\ y = Y - X^2Y + \frac{Y^3}{3}, & y_1 = Y + X^2Y - \frac{Y^3}{3}, \\ z = 2XY, & z_1 = X^2 - Y^2. \end{cases}$$

On reconnaît en (τ_1) la surface minima d'Enneper rapportée à ses lignes de courbure.

Quant à (τ) , si l'on calcule pour cette surface les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 considérées par Codazzi, p, q, r se rapportant au déplacement le long de la courbe $Y = \text{const.}$, et p_1, q_1, r_1 au déplacement le long de la courbe $X = \text{const.}$, on trouve

$$p_1 = q = 0.$$

Cela veut dire que, sur (τ) , X et Y sont les paramètres des lignes asymptotiques; ainsi les lignes asymptotiques de (τ) correspondent aux lignes de courbure de (τ_1) et sont par suite rectangulaires; il suit de là que (τ) est la surface minima adjointe à la surface d'Enneper.

Si l'on désigne par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à (τ) et par c_1, c'_1, c''_1 les cosinus directeurs de la normale à (τ_1) , ces normales étant dirigées de manière à former avec les tangentes aux courbes $X = \text{const.}$ et $Y = \text{const.}$ deux trièdres de même signe attachés aux deux surfaces, on trouve

$$\begin{aligned} c &= \frac{-2X}{1+X^2+Y^2}, & c_1 &= \frac{-2Y}{1+X^2+Y^2}, \\ c' &= \frac{2Y}{1+X^2+Y^2}, & c'_1 &= \frac{-2X}{1+X^2+Y^2}, \\ c'' &= \frac{1-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2}, & c''_1 &= \frac{1-X^2-Y^2}{1+X^2+Y^2}, \end{aligned}$$

expressions qui montrent que les normales aux deux surfaces deviennent parallèles et de même sens si l'on donne à (τ) une rotation positive de 90° autour de Oz .

En résumé :

La surface minima d'Enneper et son adjointe peuvent être disposées de manière que le lieu des milieux des cordes joignant les points correspondants soit un paraboloïde hyperbolique équilatère.

CAS OU LA SURFACE (Σ) EST UNE QUADRIQUE A CENTRE.

L'équation de la surface (Σ) peut s'écrire, dans ce cas,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

a, b, c étant réels ou purement imaginaires.

Supposons calculées les coordonnées de la surface correspondante (Σ_1) ; les coordonnées des deux surfaces (τ) et (τ_1) applicables l'une sur l'autre ont, comme nous le savons, pour coordonnées

$$(28) \quad \begin{cases} x = X + X_1, & x_1 = X - X_1, \\ y = Y + Y_1, & y_1 = Y - Y_1, \\ z = Z + Z_1, & z_1 = Z - Z_1. \end{cases}$$

Posons

$$(29) \quad \begin{cases} \frac{X}{a} = X', & aX_1 = X'_1, \\ \frac{Y}{b} = Y', & bY_1 = Y'_1, \\ \frac{Z}{c} = Z', & cZ_1 = Z'_1. \end{cases}$$

Ainsi qu'on le voit tout de suite, les deux surfaces (τ') et (τ'_1) , de coordonnées

$$(30) \quad \begin{cases} x' = X' + X'_1, & x'_1 = X' - X'_1, \\ y' = Y' + Y'_1, & y'_1 = Y' - Y'_1, \\ z' = Z' + Z'_1, & z'_1 = Z' - Z'_1, \end{cases}$$

sont aussi applicables l'une sur l'autre. Or, pour celles-ci, les deux surfaces jouant le rôle de (Σ) et de (Σ_1) , surfaces que nous désignerons par (Σ') et (Σ'_1) , ont pour coordonnées respectives X', Y', Z' et X'_1, Y'_1, Z'_1 , et (Σ') satisfait à l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire que (Σ') est une sphère.

Ainsi, à tout couple $(\tau), (\tau_1)$ de surfaces applicables tel que (Σ) soit une quadrique à centre, correspond un couple $(\tau') (\tau'_1)$ tel que (Σ') soit une sphère.

La réciproque est vraie et se démontre en remontant des équations (30) aux équations (28) à l'aide de la transformation (29).

Or, si le couple $(\tau'), (\tau'_1)$ est tel que (Σ') soit une sphère, le couple composé de (τ') et de la surface (τ'_2) symétrique de (τ'_1) par rapport à l'origine est tel que la corde joignant les points

correspondants ait une longueur constante. Par conséquent, la recherche des couples $(\sigma), (\sigma_1)$ de surfaces applicables tels que la surface (Σ) soit une quadrique à centre se ramène à la recherche des couples de surfaces $(\sigma'), (\sigma'_2)$ applicables avec invariabilité de la distance des points correspondants.

Ces couples $(\sigma'), (\sigma'_2)$ ont été étudiés par Ribaucour.

Récemment, M. Caronnet a donné un moyen simple et élégant de calculer leurs coordonnées que j'appelle x', y', z' et x'_2, y'_2, z'_2 (1).

En se reportant au travail de M. Caronnet, dans lequel il faut faire $l=2$, puisque la transformation (29) rend égale à 2 la longueur constante des cordes joignant les points correspondants de (σ') et de (σ'_2) , on voit que les coordonnées de ces deux surfaces sont, avec nos notations, définies par les relations

$$\begin{aligned} x', y', z' &= X'_1, Y'_1, Z'_1 + X', Y', Z', \\ x'_2, y'_2, z'_2 &= X'_1, Y'_1, Z'_1 - X', Y', Z', \end{aligned}$$

en prenant

$$(31) \quad X' = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad Y' = i \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad Z' = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta},$$

et, pour X'_1, Y'_1, Z'_1 , les racines des trois équations

$$(32) \quad \begin{cases} (1 - \beta^2)X'_1 + i(1 + \beta^2)Y'_1 - 2\beta Z'_1 = 4B, \\ (1 - \alpha^2)X'_1 - i(1 + \alpha^2)Y'_1 - 2\alpha Z'_1 = 4A, \\ (z + \beta)X'_1 + i(\alpha - \beta)Y'_1 + (1 - \alpha\beta)Z'_1 \\ \quad = 2(A\beta + B\alpha) - (1 + \alpha\beta)(A' + B'), \end{cases}$$

A est une fonction arbitraire de α , et B une fonction arbitraire de β .

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, p. 131.

(2) Je signale ici une erreur d'impression au commencement de l'équation (5') du travail de M. Caronnet ; il faut lire

$$-(\alpha + \beta)x + \dots$$

Je remplace d'ailleurs, dans ce travail, A par $\frac{1}{4}A$, et B par $\frac{1}{4}B$.

En résolvant le système (32) par rapport à X_1, Y_1, Z_1 , on trouve

$$(33) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{2(\Lambda + B) - (x + \beta)(\Lambda' + B')}{1 + \alpha\beta}, \\ Y_1 = i \frac{2(\Lambda - B) - (x - \beta)(\Lambda' + B')}{1 + \alpha\beta}, \\ Z_1 = - \frac{2(\Lambda\beta + Bx) + (1 - \alpha\beta)(\Lambda' + B')}{1 + \alpha\beta}. \end{cases}$$

Des expressions (31) et (33), et des relations (29), on déduit aisément X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 , et ces valeurs portées dans les équations (28) donnent enfin, pour les équations des couples $(\sigma), (\sigma_1)$ applicables de manière que (Σ) soit une quadrique à centre,

$$(34) \quad \begin{cases} x, x_1 = \frac{a(x + \beta) \pm \frac{1}{a} [2(\Lambda + B) - (x + \beta)(\Lambda' + B')]}{1 + \alpha\beta}, \\ y, y_1 = i \frac{b(x - \beta) \pm \frac{1}{b} [2(\Lambda - B) - (x - \beta)(\Lambda' + B')]}{1 + \alpha\beta}, \\ z, z_1 = \frac{c(1 - \alpha\beta) \mp \frac{1}{c} [2(\Lambda\beta + Bx) + (1 - \alpha\beta)(\Lambda' + B')]}{1 + \alpha\beta}, \end{cases}$$

les signes supérieurs se rapportant à (σ) , et les signes inférieurs à (σ_1) .

Pour que (σ) et (σ_1) soient des surfaces réelles, il faut :

1° Si (Σ) est un ellipsoïde, c'est-à-dire si a, b, c sont réels, que x et β, Λ et B soient imaginaires conjugués ;

2° Si (Σ) est un hyperboloïde à une nappe, c'est-à-dire si a et c sont réels et b purement imaginaire, que x, β, Λ, B soient réels ;

3° Enfin, si (Σ) est un hyperboloïde à deux nappes, c'est-à-dire si c est réel et a, b purement imaginaires, que x et $-\beta, \Lambda$ et $-B$ soient imaginaires conjugués.

Si l'on fait $a = b = c = \frac{l}{2}$ dans les équations (34), et si l'on change les signes de x_1, y_1, z_1 , ces équations définissent, sous une forme assez simple, les couples de surfaces applicables, tels que la corde joignant les points correspondants soit constante et égale à l .

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Fouret : *Sur la nouvelle méthode de M. Vazquez Prada pour l'extraction des racines des nombres entiers.*

M. Poincaré fait quelques observations sur ce sujet.

M. Adam : *Sur un problème de déformation.*

M. Laisant transmet deux Notes, l'une de M. Lémeray *Sur les fonctions itératives*, l'autre de M. Delannoy *Sur une question de probabilités traitée par d'Alembert.*

SÉANCE DU 20 NOVEMBRE 1894.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société : M. Duporeq, présenté par MM. Laisant et Lemoine ; M. Beudon, présenté par MM. Picard et Goursat.

Communications :

M. Fouret : *Sur une extension de la méthode de M. Vazquez Prada, à la recherche des racines des équations numériques.*

M. Raffy : *Sur les surfaces minima et leurs adjointes.*

M. Goursat : *Remarque sur la construction d'une courbe algébrique aux environs d'un point.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR UNE CONSTRUCTION APPROCHÉE DU DÉVELOPPEMENT DE LA CIRCONFÉRENCE ET REMARQUES DIVERSES;

Par M. E. LEMOINE.

I.

M. Bioche, à la séance du 6 mars 1895, a montré que l'on pouvait, avec une erreur inférieure aux erreurs généralement appréciables dans un tracé graphique, trouver soit la longueur d'une circonférence de rayon donné, soit le rayon d'une circonférence de longueur donnée, en remarquant que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ étaient respectivement des valeurs approchées de π et de $\frac{1}{\pi}$, parce que cela exprime que la longueur approchée de la demi-circonférence peut s'obtenir en ajoutant le côté du carré inscrit au côté du triangle équilatéral inscrit.

D'un autre côté, si l'on veut avoir le rayon d'une circonférence dont la demi-longueur est connue, il suffit de prendre la différence du côté du triangle équilatéral et du côté du carré inscrit dans la circonférence qui a pour rayon la longueur donnée de la demi-circonférence dont on cherche le rayon. En effet, puisque l'on a approximativement

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \pi \quad \text{et que} \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1,$$

on a approximativement $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\pi}$ (1).

Comme $\sqrt{3} = 1,73205\dots$, que $\sqrt{2} = 1,41421\dots$, on a

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,14626\dots, \quad \pi = 3,14159\dots,$$

La différence étant 0,00467..., on obtient la longueur de la

(1) Notons ici un moyen mnémonique assez curieux, qui m'a été indiqué autrefois, de retenir le nombre $\frac{1}{\pi}$ avec 7 décimales; ce nombre est 0,3183098... et on l'énonce ainsi : Les 3 journées de 1836 et le renversement de 89.

demi-circonférence à moins d'un $\frac{1}{2}$ centième près de la valeur du rayon, par excès. On a

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830\dots, \quad \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0,31784\dots;$$

la différence est 0,00046....

On a donc le rayon à moins de $\frac{1}{2}$ millièmè près, par défaut, de la longueur de la demi-circonférence.

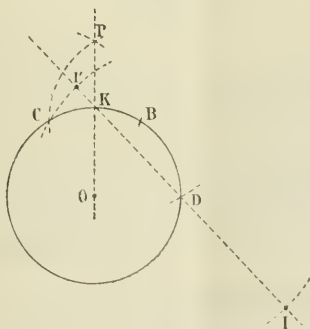
Ces constatations faites, il m'a semblé utile d'évaluer, par la Géométhrographie, le symbole de ces constructions.

1° *Une circonférence étant tracée, construire sa demi-longueur.*

La construction de M. Bioche étant d'ajouter les côtés du triangle équilatéral et du carré inscrit il s'agit de l'exécuter le plus simplement possible; voici ce que je trouve pour cela :

Je mets la pointe du compas (*fig. 1*) en un point quelconque B

Fig. 1.



de la circonférence donnée de centre O.... Op. : (C_2) ,
je prends BO et je trace B(BO) qui coupe O(BO) en C et D

Op. : $(C_1 + C_3)$,

je trace C(BO) qui coupe B(BO) en P.. Op. : $(C_1 + C_3)$,

je trace PO..... Op. : $(2R_1 + R_2)$
qui coupe la circonférence donnée en K entre O et P.

A partir de ce moment je peux opérer de deux façons (a) et (b) également simples.

(a). Je trace KD..... Op. : $(2R_1 + R_2)$,
je trace D(DC)..... Op. : $(2C_1 + C_3)$,
qui coupe KD en I dans le sens KD et en I'.

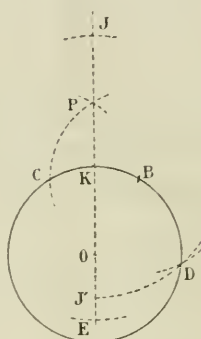
$KI = KD + CD = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, est la demi-circonférence.

Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + C_2 + 3C_3)$.

Simplicité : 14; exactitude : 9; 2 droites, 3 cercles.

(b). Je prends CD (*fig. 2*)..... Op. : $(2C_1)$,

Fig. 2.



je trace K(CD)..... Op. : $(C_1 + C_3)$,
qui coupe KP en E dans le sens KO; la pointe étant en K,
je prends KD..... Op. : (C_1) ,
et je trace K(KD)..... Op. : (C_3) ,
qui coupe PO en J dans le sens OP et en J' :

$EJ = KE + KJ = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ est la demi-circonférence cherchée.

Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + C_2 + 4C_3)$.

Simplicité : 14; exactitude : 9; 1 droite, 4 cercles.

2° La longueur l d'une demi-circonférence étant donnée, trouver son rayon.

(a'), (b'). En prenant une des extrémités O de l pour centre et l pour rayon, je décris une circonférence BCD (*fig. 2*) et (*fig. 3*)..... Op. : $(2C_1 + C_3)$,
et, en faisant sur ces circonférences les mêmes constructions que précédemment, KI' (a') (*fig. 1*) ou J'E (b') (*fig. 2*) me

donnent le rayon cherché par le symbole

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + C_2 + 4C_3).$$

Simplicité : 17; exactitude : 11; 2 droites, 4 cercles, pour la première construction (a'), ou

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 8C_1 + C_2 + 5C_3).$$

Simplicité : 17; exactitude : 11; 1 droite, 5 cercles, pour la seconde (b').

Ces constructions, d'une extrême simplicité, comme l'on voit, m'offrent une occasion, trop démonstrative pour que je ne la saisisse pas, de faire toucher du doigt l'affirmation faite par moi si souvent, que les *géomètres les plus habiles* ne peuvent absolument pas se rendre compte de la simplicité ou de la complication d'une construction, s'ils ne la mesurent pas géométrographiquement et qu'ils sont toujours bercés par la simplicité du langage, ce qui en est tout à fait différent.

A la séance du 20 mars 1895, M. Maurice d'Ocagne s'exprimait ainsi :

« M. Bioche, observant que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1463\dots = \pi + 0,0047\dots,$$

a déduit un procédé approché de rectification du cercle consistant à construire géométriquement $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ et à ajouter les segments ainsi obtenus; je ferai remarquer qu'il est très facile de construire *directement* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. »

Puis il énonce le mode de construction suivant (*Journal de Mathématiques élémentaires*, de M. de Longchamps, 1895, p. 77) :

« Dans le cercle ABA' dont le rayon est pris pour unité (*fig. 3*) tirons le rayon OB à 45° sur OA'. La parallèle à OA', menée par B, coupe la tangente en A' au point C. La bissectrice de l'angle COA coupe la tangente en A au point D, tel que $AD = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. »

Or, pour exécuter cette construction, il faut :

1° Tracer une droite OAA'..... Op. : $(R_1 + R_2)$;

La préoccupation de la simplicité réelle du trait a été si étrangère jusqu'ici aux spéculations géométriques que les choses les plus évidentes ne sont pas observées; ainsi le tracé de la tangente en A (n° 8) était inutile, puisque la longueur AD eût été aussi bien marquée par la bissectrice de l'angle COA , sur la tangente en A' déjà tracée, mais comme le géomètre ne se pose jamais la question de la simplicité du tracé *effectué*, ce qui est toute la Géométhrographie, de pareils détails n'arrêtent pas son attention.

Remarquons encore que j'ai opéré cette construction avec une très grande économie, si l'on admet, comme cela doit être dans l'espèce, qu'elle est exécutée par quelqu'un qui ne pratique pas les procédés, et qui surtout n'a pas les préoccupations géométhrographiques; car, par exemple, pour 2° et 3° les constructions sont simplifiées parce que je me sers des points A et A' comme centres des arcs de cercle nécessaires au tracé de la perpendiculaire, puisque je me sers d'un de ces arcs de cercle (celui qui a pour centre A') pour tracer la bissectrice.

Pour 4°, au lieu d'employer la méthode classique, je décris le cercle $A'(A'O)$ qui coupe OB en un point de la tangente en A' , puisque $A'OB = 45^\circ$.

Pour 5°, au lieu d'employer la méthode classique, je trace le cercle $A(A'B)$ qui coupe le cercle donné en β et je trace $B\beta$.

Pour 7°, je me sers des points B et A comme centres des arcs de cercle nécessaires.

Pour 8°, je prends à partir de K , où CB coupe la perpendiculaire OK à AA' , $KC' = KC$, puis je trace AC' .

Sans ces économies le symbole eût été beaucoup plus élevé.

Si l'on admet l'emploi de l'équerre (¹) les opérations 1°, 6°, 7° ne

(¹) Nous avons indiqué (Tome XX, page 132; 1892), les symboles adoptés pour la Géométhrographie appliquée à la Géométrie canonique de Grecs, de la droite et du cercle, où les seuls instruments permis sont la règle et le compas; quand on se sert de l'équerre, ce qui est indispensable en Géométrie descriptive, en Statique graphique, etc., il faut y ajouter de nouveaux symboles (voir *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Caen, 1894); nous allons les définir ici pour l'intelligence de ce qui suit :

Placer le bord d'une règle ou d'une équerre en coïncidence avec une droite

sont pas modifiées, mais 2° et 4° faites ensemble donnent

$$\text{Op. : } (2R'_1 + 2R_2 + 2E).$$

5° donne. Op. : $(2R'_1 + R_2 + E)$,
je supprime 8° reconnue inutile; seulement pour 3° je ne puis plus
utiliser l'arc de cercle qui avait A pour centre, puisqu'il n'est pas
tracé, le symbole est donc... Op. : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$,
de sorte que le symbole total, avec l'équerre, de la construction
de M. d'Ocagne, sera

$$\text{Op. : } (7R_1 + 4R'_1 + 7R_2 + 3E + 4C_1 + 4C_3).$$

Simplicité : 29; exactitude : 18; 7 droites, 4 cercles.

En admettant l'équerre, la construction (a) donne

$$\text{Op. : } (2R_1 + 2R'_1 + 2R_2 + E + 2C_1 + C_2 + 2C_3).$$

Simplicité : 12; exactitude : 8; 2 droites, 2 cercles;

et la construction (b)

$$\text{Op. : } (2R'_1 + R_2 + E + 4C_1 + C_2 + 3C_3).$$

Simplicité : 12; exactitude : 8; 1 droite, 3 cercles.

Depuis cette Communication, M. Bioche nous a fait savoir que
la remarque sur la valeur de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ avait déjà été faite, ainsi
qu'on le lui avait signalé. On trouve, en effet (*Géométrie* d'Amiot,
revue par Vintéjoux, page 171), cet exercice :

tracée s'assimile spéculativement à l'opération de la Géométhrographie de la
règle et du compas : mettre le bord de la règle en coïncidence avec deux points,
c'est-à-dire : Op. : $(2R_1)$, mais, dans le but de mettre en évidence dans le symbole
d'une construction le rôle que l'équerre y a joué, nous le désignerons par
Op. : $(2R'_1)$; nous désignons aussi par Op. : $(2R'_1)$: mettre le bord de la règle
en coïncidence avec deux points *lorsque cela sera fait pour se servir de*
l'équerre.

Nous ne comptons pas l'opération, toute mécanique, de plaquer l'équerre sur
la règle ou la règle sur l'équerre.

Faire glisser l'équerre sur la règle jusqu'à ce que le bord de l'équerre passe par
un point placé, sera Op. : (E). C'est à cela que se réduisent les symboles relatifs
à l'emploi de l'équerre. Tracer avec l'équerre une droite passant par un point et
parallèle (ou perpendiculaire si l'on admet l'équerre aussi pour tracer les perpen-
diculaires) sera

$$\text{Op. : } (2R'_1 + E + R_1).$$

Simplicité : 4; exactitude : 3; 1 droite.

Vérifier que la somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits dans un même cercle surpasse la moitié de la circonférence d'une quantité moindre que $\frac{1}{2}$ centième de rayon.

II.

Je vais indiquer une construction très simple que j'ai trouvée autrefois et qui n'est, peut-être, pas connue, pour avoir la longueur approximative du quart d'une circonférence tracée et décrite sur une droite tracée AB comme diamètre. Elle s'appuie sur la remarque suivante :

Le cosinus du plus petit angle qui a pour sinus $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (côté du décagone inscrit dans le cercle de rayon 1) est

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0,7861 \dots \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = 0,78539 \dots;$$

c'est le quart de la circonférence qui a AB = 1 pour diamètre. La différence de ces nombres étant 0,0007..., on voit que si sur le cercle de diamètre AB, on a une corde AH = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, BH sera $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ou le quart de la circonférence du diamètre AB. L'approximation est un peu plus grande que dans la construction déduite de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Je trace A(AB) (fig. 4) qui coupe AB en B', puis B'(AB) qui coupe A(AB) en C et en C', puis C'(AB) qui coupe B'(AB) en D, puis AD qui coupe A(AB) en E entre D et A

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3),$$

je trace C(CE) qui coupe AB en G entre A et B.

$$\text{Op. : } (2C_1 + C_3) \quad (1),$$

(1) Il est facile d'établir que AG = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; AG est donc le plus grand segment de AB divisé additivement en moyenne et extrême raison: le cercle C(CE) couperait AG et G' qui donnerait le point de division de AB en moyenne et extrême raison par segments soustractifs.

Remarquons en passant que ce tracé peut être considéré comme celui du tracé

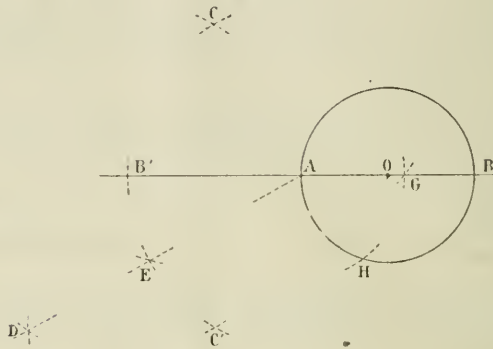
je trace $A(AG)$ Op. : $(2 C_1 + C_3)$,
qui coupe le cercle donné en H; la longueur BH, qu'il n'y a pas
besoin de tracer, est la longueur cherchée obtenue par

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + 8 C_1 + 5 C_3).$$

Simplicité : 16; exactitude : 10; 1 droite, 5 cercles.

En employant l'équerre, on ne pourrait l'utiliser que pour dé-

Fig. 4.



terminer le point E, en menant la perpendiculaire à $B'C'$ passant
par A; le symbole, très peu plus simple, serait

$$\text{Op. : } (2 R'_1 + R_2 + E + 7 C_1 + 4 C_3).$$

Simplicité : 15; exactitude; 10; 1 droite. 4 cercles.

M. Mannheim a modifié cette construction d'une façon heu-
reuse (non pour modifier le symbole, qui est *identique* dans les
deux cas, mais parce que la construction est mieux ramassée, plus
parlante), de la façon suivante :

Je trace $A(AB)$ (*fig. 5*) qui coupe AB en B'. Op. : $(2 C_1 + C_3)$,
puis la perpendiculaire à AB menée par A.

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + 2 C_1 + 2 C_3),$$

d'une droite AB en moyenne et extrême raison par le symbole

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + 6 C_1 + 4 C_3).$$

Simplicité : 13; exactitude : 8; 1 droite, 4 cercles.

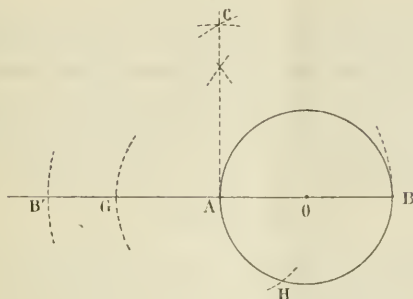
et nous n'en connaissons pas de plus simple.

elle coupe $\Lambda(AB)$ en C, je trace $O(OC)$, O étant le milieu de AB.

$$\text{Op. : } (2C_1 + C_3),$$

elle coupe AB en G entre A et B'; je trace $\Lambda(AG)$ qui coupe la

Fig. 5.



circonférence donnée en H..... Op. : $(2C_1 + C_3)$.

La distance BH est le quart de la circonférence donnée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 8C_1 + 5C_3).$$

Simplicité : 16; exactitude : 10; 1 droite, 5 cercles.

Je ferai remarquer que, si l'on admet l'usage de l'équerre aussi pour mener les perpendiculaires, la construction de M. Mannheim a un léger avantage sur la mienne faite également avec l'équerre, car la perpendiculaire à AB, menée par A, se trace par le symbole..... Op. : $(2R'_1 + R_2 + E)$, de sorte que le symbole total est

$$\text{Op. : } (2R'_1 + R_2 + E + 6C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 13; exactitude : 9; 1 droite, 3 cercles.

Il faut cependant signaler que ma construction n'exige pas que le centre de la circonférence donnée soit placé. S'il ne l'était pas, la construction de M. Mannheim exigerait qu'on le plaçât d'abord et son symbole serait, avec la règle et le compas.

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 6C_3),$$

de cinq opérations élémentaires (dont le tracé d'une droite et d'un cercle) plus compliquées que la mienne, et avec l'équerre

$$\text{Op. : } (2R_1 + 2R'_1 + 2R_2 + E + 7C_1 + 4C_3),$$

plus compliquée que la mienne de trois opérations élémentaires (dont le tracé d'une droite).

III.

Toutes ces constructions donnent une approximation qui est ordinairement suffisante pour la pratique, mais nous voulons terminer en analysant une construction de la longueur de la circonférence, construction dont l'approximation *graphique* est parfaite, car la longueur que l'on trouve a pour valeur

$$6,2831839062\dots$$

et la circonférence de rayon 1 égale $6,283185306\dots$

La différence $0,00000140$ est beaucoup plus petite que l'approximation possible par l'emploi d'une opération graphique.

Cette construction, signalée par M. de Longchamps (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1886, p. 137), comme donnée par M. Ferdinand Breitschneider dans le *Journal de Grünert*, 1836, p. 447, est beaucoup plus ancienne, car dans le Tome II, note III, p. 235, des *Récréations mathématiques* de E. Lucas, je lis qu'elle est due à Specht (*Journal de Crelle*, t. 3, p. 83).

« Soit OA le rayon d'une circonférence de centre O, AOA' un diamètre; on trace la tangente en A à cette circonférence, et l'on prend sur cette droite et dans le même sens des longueurs AB, BC, CD respectivement égales au double, au cinquième et aux deux cinquièmes du rayon. On tire les droites OC, OD, et l'on prend sur la droite AO, dans le sens AO, une longueur AE égale à OC; enfin, on mène par le point E une parallèle à OD jusqu'à son intersection F avec AB. »

La droite AF est, avec une grande approximation, égale à la circonférence. En exécutant cette construction aussi économiquement que le permet la Géométhrographie on obtient les résultats suivants (*fig. 6*):

1^o Placer le point B. — Je trace A(AO) qui coupe O(AO) en I au-dessous de AO, puis I(AO) qui coupe A(AO) en J, puis J(AO) qui coupe I(AO) en K, je trace AK qui coupe A(AO) en L au-dessus de AO, je trace L(AO) qui place B sur AK.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 4C_3).$$

Il faut remarquer que nous avons tracé toutes les lignes auxiliaires dans tous les tracés des figures jointes au texte, excepté dans la *fig.* 3 qui est la reproduction de la figure faite par M. d'Ocagne dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* cité plus haut; elle est fort simple parce qu'elle n'en contient aucune.

Si l'on admet l'équerre pour effectuer la construction de Specht, on peut s'en servir trois fois : pour mener la tangente en A, la droite B_2C et la droite EF .

Le symbole sera

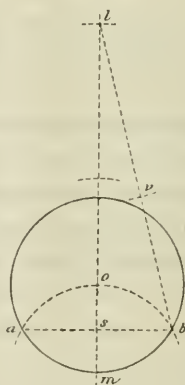
$$\text{Op. : } (4R_1 + 6R'_1 + 5R_2 + 3E + 11C_1 + 6C_3).$$

Simplicité : 35; exactitude : 24; 5 droites, 6 cercles.

IV.

M. Ant. Pleskot, professeur à l'École réelle tchèque de Prague, donne dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de

Fig. 7.



M. de Longchamps, 1895, p. 125, une construction simple pour obtenir approximativement le quart de la circonférence (*fig.* 7). Soit o le centre. Je trace un diamètre quelconque om qui coupe la circonférence en m , je trace le cercle $m(mo)$ qui coupe le cercle donné en a et en b , je trace ab qui coupe om en s .

$$\text{Op. : } (3R_1 + 2R_2 + 2C_1 + C_3).$$

A partir de s dans le sens so je prends $sl = 2ab$.

$$\text{Op. : } (4C_1 + 2C_3),$$

je trace lb et je prends, v étant entre l et b , $lv = 2r$.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3).$$

bv est le quart de la circonférence

$$\text{Op. : } (5R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 4C_3).$$

Simplicité : 21 ; exactitude : 14 ; 3 droites, 4 cercles.

On calcule facilement que l'on a $bv = \frac{\sqrt{51}}{2} - 2 = 1,570714\dots$,
comme d'ailleurs $\frac{\pi}{2} = 1,570796\dots$

On voit que la différence est 0,000082...

Cette construction est un peu plus compliquée que celle que j'ai donnée (*voir* plus haut), mais elle est aussi plus exacte.

Je me permets d'insister en terminant sur ce que la Géométrographie est le seul moyen de juger les constructions ; elle a une utilité pratique lorsqu'elle est appliquée à des tracés que l'on effectue d'après ses règles ; mais, comme elle est, avant tout, spéculative, elle sert aussi au géomètre, en lui inspirant des idées qu'il n'aurait pas eues sans elle. La Géométrographie s'apprend, du reste, avec la plus extrême facilité ; une heure suffit *largement* pour l'étudier de façon à pouvoir s'en servir ; puis, au bout de quelques exercices, on en est complètement maître.

J'ai le plaisir de savoir que l'usage s'en est répandu avec une rapidité peu ordinaire pour les nouveautés, mais qui s'explique par cette facilité ; on l'enseigne actuellement, à ma connaissance, à l'École militaire de Belgique, à celle de Turin, à l'École polytechnique de Zurich, à l'École technique de Milan, et même quelques professeurs en parlent à Paris dans leur enseignement.

UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS ITÉRATIVES ;

Par M. LÉMERAY.

Si l'on se donne la relation

$$z_1 = \varphi(z),$$

la fonction

$$z_n = \varphi(z_{n-1}) = \varphi^{(n)}(z)$$

est dite la *n^{ième} fonction itérative de $\varphi(z)$* . M. Kœnigs ⁽¹⁾ a étudié le cas où, x désignant une solution de l'équation

$$z - \varphi(z) = 0,$$

on a

$$\text{mod} \left[\frac{d\varphi(z)}{dz} \right]_x < 1.$$

Si l'affixe de z est pris à l'intérieur d'un contour convenable, le point x est point limite de la substitution $[z, \varphi(z)]$. Il a étudié la fonction

$$B(z) = \lim \frac{\varphi_n(z) - x}{[\varphi'(x)]^n}$$

pour n infini.

Cette fonction a reçu depuis plusieurs applications; les plus récentes sont dues, je crois, à M. Appell ⁽²⁾ et à M. Grévy ⁽³⁾. M. Grévy a considéré particulièrement le cas où $\varphi'(x)$ est nul. Je me propose de considérer le cas

$$\varphi'(x) = 1.$$

1. Désignons par z_{n+1} la $n + 1^{\text{ième}}$ fonction itérative; alors

$$z_{n+1} = \varphi(z_n).$$

Dérivons par rapport à z , on aura

$$\begin{aligned} \frac{dz_{n+1}}{dz} &= \frac{dz_{n+1}}{dz_n} \frac{dz_n}{dz}, \\ \frac{d^2 z_{n+1}}{dz^2} &= \frac{d^2 z_{n+1}}{dz_n^2} \left(\frac{dz_n}{dz} \right)^2 + \frac{dz_{n+1}}{dz_n} \frac{d^2 z_n}{dz^2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{d^p z_{n+1}}{dz^p} &= \frac{d^p z_{n+1}}{dz_n^p} \left(\frac{dz_n}{dz} \right)^p + U_p + \frac{dz_{n+1}}{dz_n} \frac{d^p z_n}{dz^p}, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Annales de l'École Normale*; 1884. Supplément.

⁽²⁾ *Sur des équations différentielles transformables en elles-mêmes* (*Acta mathematica*, t. XV).

⁽³⁾ *Étude sur les équations fonctionnelles* (*Ann. de l'Éc. Norm.*; août 1894).

où U_p désigne la somme des termes qui contiennent les dérivées de z_n par rapport à z avec des indices de dérivation autres que 1 ou p .

Supposons $\varphi(z)$ telle que, x désignant une racine de l'équation

$$\varphi(z) - z = 0,$$

la fonction $\varphi(z) - z$ ait, au point x , ses $p - 1$ premières dérivées nulles; dans cette hypothèse $\varphi'(x) = 1$ et U_p s'annule pour $z = x$. l'expression de la $p^{\text{ième}}$ dérivée au point x est

$$\left(\frac{d^p z_{n+1}}{dz^p}\right)_x = \left(\frac{d^p z_{n+1}}{dz^p}\right)_x + \left(\frac{d^p z_n}{dz^p}\right)_x.$$

Faisons successivement $n = 1, 2, 3, \dots$; on en tire

$$\left(\frac{d^p z_n}{dz^p}\right)_x = n \left(\frac{dz_1^p}{dz^p}\right)_x.$$

Par suite, dans notre hypothèse, la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la $n^{\text{ième}}$ fonction itérative au point x est égale à n fois la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction donnée au même point.

2. Les fonctions holomorphes au point x , qu'elles admettent pour point limite et telles qu'en ce point les $p - 1$ premières dérivées de la fonction $\varphi(z) - z$ soient nulles peuvent s'écrire

$$\varphi(z) = z_1 = z + (z - x)^p \left[\frac{P}{p!} + \Phi(z - x) \right]$$

où P désigne la valeur (supposée différente de zéro) de $\left(\frac{d^p z_1}{dz^p}\right)_x$ et où Φ désigne une fonction qui, lorsque $z - x$ devient infiniment petit d'un certain ordre, devient infiniment petite d'un ordre au moins égal. Les fonctions considérées ne peuvent différer que par la fonction Φ . Supposons que, parmi ces fonctions, il y en ait une pour laquelle le produit

$$n(z_n - x)^{p-1}$$

ait une limite quand n est infiniment grand du premier ordre. C'est dire que $z_n - x$ est infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{p-1}$. La dif-

férence de deux itératives successives est

$$z_{n+1} - z_n = (z_n - x)^p \frac{P}{p!} + (z_n - x)^p \Phi(z_n - x);$$

à la limite, le premier terme du second membre est de l'ordre $\frac{p}{p-1}$; le deuxième terme est, au moins, de l'ordre

$$\frac{p}{p-1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p+1}{p-1};$$

il reste

$$\lim (z_{n+1} - z_n) = \frac{P}{p!} \lim (z_n - x)^p.$$

On voit donc que $z_{n+1} - z_n$ est d'ordre p par rapport à $(z_n - x)$.

Si le produit $n(z_n - x)^{p-1}$ tend vers une limite, cette limite est indépendante de la valeur initiale de z , pourvu que cette dernière ait été choisie dans la région de convergence régulière (au sens de M. Kœnigs) appartenant au point x . Soient, en effet, deux valeurs de ce produit

$$n(z_n - x)^{p-1}, \quad (n + \nu)(z_{n+\nu} - x)^{p-1}.$$

Leur rapport est

$$\frac{n}{n + \nu} \left(\frac{z_n - x}{z_{n+\nu} - x} \right)^{p-1}.$$

Quand, ν étant fini, n croît sans limite, le premier facteur tend vers l'unité; d'autre part, en général, la limite du rapport

$$\frac{z_n - x}{z_{n+\nu} - x}$$

est, comme l'on sait,

$$\frac{1}{(\varphi'_x)^{\nu}};$$

dans notre cas, le deuxième facteur tend donc aussi vers l'unité. Mais $z_{n+\nu}$ peut être considéré comme étant la $n^{\text{ième}}$ fonction itérative quand on a pris pour valeur initiale, non plus z , mais z_{ν} ; la proposition est donc démontrée et la limite du produit est indépendante de z .

3. Je dis maintenant que, s'il existe une de ces fonctions, toutes les autres (qui n'en diffèrent que par Φ) présenteront la

même limite pour le produit considéré. Soit la fonction

$$u = z + (z - x)^p \left[\frac{p}{p!} + \Phi_1(z - x) \right].$$

Sa ($m + 1$ ^{ième}) fonction itérative est

$$u_{m+1} = u_m + (u_m - x)^p \left[\frac{p}{p!} + \Phi_1(u_m - x) \right].$$

On peut évidemment trouver des valeurs de m et de n telles que l'on ait

$$z_n < u_m < z_{n+1},$$

et soit $u_m = z_n + \varepsilon$, ε étant une quantité plus petite que $z_{n+1} - z_n$; on a

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{z_{n+1} - z_n} = \left(\frac{z_n + \varepsilon - x}{z_n - x} \right)^p \left[\frac{\frac{p}{p!} + \Phi_1(z_n + \varepsilon - x)}{\frac{p}{p!} + \Phi_1(z_n - x)} \right].$$

A la limite, ε est infiniment petit du même ordre que $z_{n+1} - z_n$; il est donc infiniment petit d'ordre p par rapport à $z_n - x$; la limite du premier facteur du second membre est 1 ; le deuxième facteur a aussi l'unité pour limite ; le premier membre a donc pour limite l'unité. Par suite, il existe des valeurs de m et de n assez grandes, mais finies, et différant d'une quantité constante, pour qu'en rangeant suivant l'ordre de convergence vers x , les termes de la suite $z_1, z_2, z_3, \dots$ et de la suite $u_1, u_2, u_3, \dots$, on trouve alternativement un terme de chaque suite,

$$z_n, \quad u_m, \quad z_{n+1}, \quad u_{m+1}, \quad z_{n+2}, \quad \dots$$

Si l'on pose

$$m = n + r,$$

les deux produits s'écrivent

$$n(z_n - x)^{p-1}, \quad (n + r)(u_{n+r} - x)^{p-1};$$

à la limite, le second devient

$$n(u_m - x)^{p-1}.$$

Comme, dans le premier, on peut remplacer z_n par z_{n+1} , on

voit que l'on a à la limite (u_m étant compris entre z_n et z_{n+1})

$$\lim n(z_n - x)^{p-1} = \lim n(u_m - x)^{p-1} = \lim n(u_n - x)^{p-1}.$$

4. La limite étant indépendante de Φ et étant constante est nécessairement fonction de P . Appelons α et β deux valeurs successives du produit

$$\alpha = n(z_n - x)^{p-1},$$

$$\beta = (n+1)(z_{n+1} - x)^{p-1} = n(z_{n+1} - x)^{p-1} + (z_{n+1} - x)^{p-1},$$

on a

$$\beta - \alpha = n[(z_{n+1} - x)^{p-1} - (z_n - x)^{p-1}] + (z_{n+1} - x)^{p-1};$$

or

$$\begin{aligned} z_{n+1} - x &= (z_n - x) + (z_n - x)^p \left(\frac{P}{p!} + \Phi \right) \\ &= (z_n - x) \left[1 + (z_n - x)^{p-1} \left(\frac{P}{p!} + \Phi \right) \right]. \end{aligned}$$

Posons

$$\left(\frac{P}{p!} + \Phi \right) = \varpi.$$

Élevons à la puissance $p-1$, et retranchons des deux membres $(z_n - x)^{p-1}$; on a

$$\begin{aligned} (z_{n+1} - x)^{p-1} - (z_n - x)^{p-1} &= (p-1)(z_n - x)^{2(p-1)}\varpi \\ &\quad + \frac{p-1}{1} \frac{p-2}{2} (z_n - x)^{3(p-1)}\varpi^2 + \dots; \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= (z_{n+1} - x)^{p-1} + n(p-1)(z_n - x)^{2(p-1)}\varpi \\ &\quad + n \frac{p-1}{1} \frac{p-2}{2} (z_n - x)^{3(p-1)}\varpi^2 + \dots \end{aligned}$$

Divisons par $(z_n - x)^{p-1}$, et passons à la limite en remarquant qu'alors

$$\lim \varpi = \frac{P}{p!};$$

il vient

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{(z_n - x)^{p-1}} = 1 + n(p-1)(z_n - x)^{p-1} \frac{P}{p!} = K,$$

où K est une grandeur inconnue; on a alors

$$\lim n(z_n - x)^{p-1} = \frac{(K-1)p!}{P(p-1)}.$$

3. Il reste à montrer qu'il existe une fonction telle que le produit $n(z_n - x)^{p-1}$ ait une limite. Pour trouver une telle fonction, éliminons u entre les équations

$$u(z - x)^{p-1} = C, \quad (u + 1)(z_1 - x)^{p-1} = C;$$

on en tire

$$z_1 = x + \sqrt[p-1]{\frac{C(z - x)^{p-1}}{C + (z - x)^{p-1}}}.$$

Cette fonction s'itère directement; on trouve

$$z_n = x + \sqrt[p-1]{\frac{C(z - x)^{p-1}}{C + n(z - x)^{p-1}}}.$$

On vérifie qu'elle admet bien x pour point limite; la limite du produit est C . Il reste à déterminer la valeur de K , au moyen de l'expression

$$C = \frac{(K-1)p!}{P(p-1)}.$$

Pour cela; il nous faut connaître la valeur de P . Développons le binôme

$$[C + (z - x)^{p-1}]^{-\frac{1}{p-1}},$$

on obtient

$$\begin{aligned} C^{-\frac{1}{p-1}} &= \frac{1}{p-1} C^{-\frac{1}{p-1}-1} (z - x)^{p-1} \\ &+ \frac{1}{2(p-1)} \left(\frac{1}{p-1} + 1 \right) C^{-\frac{1}{p-1}-2} (z - x)^{2(p-1)} + \dots; \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} z_1 &= x + (z - x) - \frac{1}{p-1} \frac{(z - x)^p}{C} \\ &+ \frac{1}{2(p-1)} \left(\frac{1}{p-1} + 1 \right) \frac{(z - x)^{2p-1}}{C^2} + \dots \end{aligned}$$

En dérivant p fois cette expression, on arrive à une expression de la forme

$$\frac{d^p z_1}{dz^p} = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{C} p(p-1) \dots 3.2.1 + R,$$

où R désigne l'ensemble des termes qui contiennent des puis-

sances de $z = x$. Pour $z = x$, R s'annule; il reste donc

$$\left[\frac{dp z_1}{dz^p} \right]_x = P = - \frac{p!}{(p-1)G}.$$

On voit donc que K est nul; en sorte que :

Si une fonction $\varphi(z)$, holomorphe au voisinage du point x , admet ce point pour point limite; si, de plus, les $p-1$ premières dérivées de la fonction $\varphi(z) - z$ sont nulles au point x , on aura

$$\lim n[\varphi^{(n)}(z) - x]^{p-1} = - \frac{p!}{P(p-1)},$$

P désignant la valeur de la première dérivée au point $z = x$.

SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉS TRAITÉE PAR D'ALEMBERT;

Par M. DELANNOY.

Dans un numéro récent du *Bulletin de la Société mathématique* (t. XXIII, p. 185), M. Maupin cherche à expliquer, par des omissions de facteurs, les erreurs commises par d'Alembert dans la résolution de certains problèmes de probabilités. Cette explication n'est pas admissible, car les formules données par d'Alembert ne ressemblent en rien aux formules véritables.

Il faut reconnaître que d'Alembert s'est complètement trompé, et cela n'a rien d'étonnant, car, tout grand mathématicien qu'il fût, il n'entendait rien aux questions de probabilités ⁽¹⁾. La preuve, c'est qu'il ne voulut jamais admettre $\frac{2}{3}$ pour la probabilité d'amener une fois *pile* en deux coups, au jeu de *pile ou face*; il soutenait que la probabilité était $\frac{2}{3}$, disant qu'il faut réduire à une les deux combinaisons qui donnent *pile* au premier coup, puisque dès que *pile* est venu le jeu est fini et le second coup est compté pour rien.

Bien plus, il n'était pas démontré, pour d'Alembert, que la probabilité d'un événement quelconque ne dût pas toujours être considérée comme égale à $\frac{1}{2}$ ⁽²⁾.

(1) L'esprit de d'Alembert, habituellement juste et fin, déraisonnait complètement sur le Calcul des probabilités (J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, Préface, p. x).

(2) Il peut se faire qu'un événement arrive, il se peut aussi qu'il n'arrive pas :

La solution bien connue du *problème des rencontres* nous donne les formules véritables.

Appelons Q_n le nombre des combinaisons dans lesquelles aucune des n cartes ne sort à son rang. On a

$$Q_n = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

Le nombre des combinaisons dans lesquelles p cartes sortent à leur rang est égal au produit de Q_{n-p} par le nombre C_n^p des combinaisons de n objets pris p à p .

Par suite, la probabilité qu'une carte *au moins* sortira à son rang est

$$1 - \frac{Q_n}{n!} = 1 - \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

La probabilité qu'une carte *seulement* sortira à son rang est

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{n(n-1)!}{n!} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

La probabilité que deux cartes *au moins* sortiront à leur rang est

$$1 - \left(\frac{Q_n}{n!} + P_1 \right) = 1 - \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} + 2 \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \right\}^{(1)}.$$

La probabilité que deux cartes *seulement* sortiront à leur rang est

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{1 \cdot 2 \cdot n!} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \right] \\ &= \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \right]. \end{aligned}$$

On voit que ces formules ne ressemblent en rien à celles de d'Alembert et pas davantage à celles de M. Maupin.

ce sont deux cas possibles, un seul est favorable. Toute probabilité est donc $\frac{1}{2}$. L'erreur est grossière. D'Alembert a élevé l'objection et refusé de passer outre (J. BERTRAND, *loc. cit.*, p. 2).

(¹) Cette formule n'est pas complètement identique à celle qui se trouve à la page 95 du *Traité sur les jeux de hasard*. M. Laurent n'a pas donné le dernier terme de P_1 , qui n'est pas $\frac{(-1)^n}{n!}$, comme il semble l'admettre dans la formule qu'il donne pour deux cartes *seulement* sortant à leur rang.

Ces dernières sont cependant exactes ⁽¹⁾, mais seulement pour le tirage dans les urnes considérées.

Or, le tirage dans ces urnes ne peut être assimilé au tirage des cartes. La probabilité de tirer une boule blanche dans la $p^{\text{ième}}$ urne est toujours $\frac{1}{n-p+1}$, tandis que la probabilité du tirage de la carte p dépend des cartes sorties antérieurement. Cette probabilité est bien $\frac{1}{n-p+1}$ au $p^{\text{ième}}$ tirage si la carte p n'est pas déjà sortie ; mais elle est nulle si cette carte a été tirée à l'un des coups précédents. M. Maupin n'a pas tenu compte de cette éventualité, et c'est pour cela que ses formules ne sont pas applicables aux problèmes traités par d'Alembert (sauf pour le premier cas où l'on cherche la probabilité que toutes les cartes sortiront à leur rang).

Montmort, dans son *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*, a cherché la probabilité qu'une carte *au moins* sortira à son rang (p. 54). Il a résolu le problème exactement pour les premières valeurs de n .

Je profite de l'occasion qui m'est offerte, pour rectifier une erreur ⁽²⁾ commise par Montmort dans le même *Traité* (p. 107), à l'article *Brelan*.

Le *Brelan* se jouait avec un jeu de piquet dont on avait retiré les quatre *sept*, par conséquent avec 28 cartes.

Voici le problème, avec la solution de Montmort :

« Pierre, Paul et Jacques jouent au *Brelan*, Pierre et Paul tiennent le jeu, et Jacques passe. La carte qui retourne est le roi de cœur ; Pierre est premier, il a l'as et le roi de carreau, et l'as de cœur. Paul a l'as, le neuf et le huit de trèfle. Deux des spectateurs, qui ont vu chacun les jeux de Pierre et de Paul et n'ont pas vu celui de Jacques, disputent pour savoir lequel des deux joueurs, Pierre et Paul, a le plus beau jeu et le plus d'espérance de gagner. L'un des deux, nommé Jean, parie pour Pierre ; l'autre, nommé Thomas, parie pour Paul.

(1) Sauf celle du cas III du dernier problème. Il n'y a pas une seule chance de n'avoir que des boules noires. Il y en a 7 ! et la probabilité cherchée est $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ et, pour le cas général, $\frac{n-1}{n}$.

(2) Cette erreur a été reproduite dans le *Dictionnaire des jeux mathématiques* (p. 15).

L'argent de la gageure est nommé A. On demande quel est le sort des deux spectateurs, Jean et Thomas, et ce qu'ils devraient mettre chacun au jeu pour parier sans avantage ni désavantage.

» Il faut remarquer : 1° que Jean gagnera, si les trois cartes de Jacques sont ou trois cœurs ou trois carreaux ; 2° qu'il gagnera encore si l'une des trois cartes étant un pique ou un trèfle, les deux autres cartes sont ou deux cœurs ou deux carreaux ; 3° que si l'une des trois cartes de Jacques est un cœur ou un carreau, les autres étant des piques, Jean aura gagné ; 4° qu'il gagnera encore si les trois cartes de Jacques sont un carreau, un cœur et un pique, et que dans toute autre disposition des cartes de Jacques il a perdu.

» Cela posé, il ne reste plus qu'à examiner combien il y a de hasards différents, qui donnent chacune de ces quatre dispositions différentes des trois cartes de Jacques. On trouvera, par les propositions 11, 12, 13, 14, qu'il y en a vingt pour la première, deux cent vingt pour la seconde, deux cent dix pour la troisième, et cent soixante-quinze pour la quatrième ; et, par conséquent, le sort de Jean sera $\frac{125}{266} = \frac{1}{2} A - \frac{4}{133}$, ce qui fait voir que la condition de Pierre est *moins* avantageuse que celle de Paul, et que Jean, pour parier également contre Thomas, devrait mettre au jeu 125 contre 141. »

Dans la seconde disposition des trois cartes de Jacques, l'énumération de Montmort est incomplète. Il faut dire :

2° Il gagnera encore si l'une des trois cartes étant un pique, ou un trèfle, *ou un carreau*, les deux autres sont des cœurs ; ou bien si l'une des trois cartes étant un pique, ou un trèfle, *ou un cœur*, les deux autres sont deux carreaux.

Le nombre des hasards correspondant à cette seconde disposition des trois cartes de Jacques est donc 320, au lieu de 220 ; par conséquent, le sort de Jean sera $\frac{145}{266} = \frac{1}{2} A + \frac{6}{133}$; ce qui fait voir que la condition de Pierre est *plus* avantageuse que celle de Paul, et que Jean, pour parier à chances égales contre Thomas, devrait mettre au jeu 145 contre 121.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENTE DE M. GOURSAT.

Démission :

M. Quintard et M. Mathé adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Lancelin : *Sur une propriété géométrique de la surface engendrée par les ellipses osculatrices dans le mouvement troublé.*

M. Borel : *Remarques sur la représentation des fonctions qui admettent des dérivées de tous les ordres.*

M. Raffy : *Sur une propriété commune aux hélicoïdes, aux surfaces spirales et aux surfaces minima.*

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENTE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Bioche : *Sur certaines surfaces du troisième ordre.*

M. Fleury : *Sur la considération de l'infini.*

M. Caronnet : *Sur la déformation des surfaces de translation.*

M. S. MAXGEOT adresse la Note suivante :

Sur le centre de gravité d'une espèce de solide à deux dimensions
infiniment petites.

Le problème général des déblais et remblais, qui a attiré l'attention des géomètres à la suite des travaux de Monge, conduit par une voie naturelle à la question qui fait l'objet de cette Note.

Je considère un solide infiniment petit ayant pour forme limite

un segment fini de droite, AB. Le centre de gravité de ce solide, que je suppose homogène, a pour position limite un point H. Je me propose de déterminer le point H quand le solide est défini de la manière suivante : il est limité, d'une part, par deux surfaces arbitraires passant respectivement aux extrémités A, B du segment et, d'autre part, par une surface fermée infiniment petite S, d'une congruence de droites Δ , dont l'une, Δ' , contient les points A et B.

J'admettrai que, en allant de A à B sur Δ' , on ne rencontre aucun des deux points focaux F, F' de cette droite.

Soient φ la distance, affectée de signe, d'un point variable de la droite Δ au pied de cette droite sur une surface fixe σ prise à volonté; et a, b, h, f, f' les valeurs de φ qui définissent, sur Δ' , les cinq points A, B, H, F, F'.

Si ε est le volume compris entre la surface S et les deux surfaces infiniment voisines $\varphi = \text{const.}$, $\varphi + d\varphi = \text{const.}$, on a

$$h \int_a^b \varepsilon = \int_a^b \varphi \varepsilon,$$

les deux intégrales se rapportant à la variable φ . Or, ε a pour expression $(\varphi - f)(\varphi - f')d\varphi$, à un facteur près qui est indépendant de φ . On obtient donc la formule

$$2h = \frac{3(a^3 - b^3) - 4(f + f')(a^3 - b^3) + 6ff'(a^2 - b^2)}{2(a^3 - b^3) - 3(f + f')(a^2 - b^2) + 6ff'(a - b)}$$

pour déterminer la position du point H.

Si l'on fait passer la surface σ par le milieu O de AB, cette relation prend la forme involutive

$$3hff' + a^2(h + f + f') = 0.$$

En partant de cette formule, on est conduit à la construction géométrique suivante du point H :

On décrit deux demi-cercles sur AB et OF comme diamètres; on projette leur intersection I en C sur la droite AB, sur laquelle on porte ensuite les longueurs $OD = OD' = \frac{1}{3}OC$, OD ayant la direction OF. Puis, aux points D et D', on élève à la droite AB deux perpendiculaires d'égales longueurs DE, D'E', la première terminée au demi-cercle OIF. Le point H appartient à un côté de

l'angle droit dont le sommet est placé au point E' et dont l'autre côté passe par F' .

Si le point F' est à l'infini, le point H coïncide avec le point D' .

Dans le cas où les deux points focaux F, F' sont tous les deux à l'infini, le point H est le milieu même de AB .

Remarquons, pour terminer, que l'on pourra construire de cette manière le centre de gravité de chacun des éléments de volume compris à l'intérieur des divers pinceaux formés par les normales à une surface.

M. GÉRARD adresse la Note suivante :

Sur le postulat relatif à l'équivalence des polygones, considéré comme corollaire du théorème de Varignon.

Depuis Duhamel, on appelle *équivalents* deux polygones formés de polygones partiels superposables chacun à chacun. Dans cet ordre d'idées, il est indispensable de démontrer qu'un polygone ne peut pas être équivalent à l'une de ses parties. Dans ces derniers temps, MM. Réthy, Schur, Rausenberger, Veronèse, Lazzeri, etc., etc., ont donné diverses démonstrations de ce théorème fondamental. Mais la démonstration est immédiate si l'on s'appuie sur le théorème de Varignon.

On appelle *moment d'un vecteur* AB par rapport à un point O le produit de la longueur de ce vecteur par sa distance au point O précédé du signe $+$ ou du signe $-$ selon que le point O est à gauche ou à droite d'un mobile qui parcourt la droite AB dans le sens AB .

Considérons un polygone P et supposons qu'un observateur, parcourant le périmètre dans le sens dit *positif*, c'est-à-dire de manière à avoir l'intérieur du polygone à sa gauche, rencontre les sommets dans l'ordre $A, B, C, \dots, M, N$; nous appellerons *moment du polygone* P par rapport au point O la somme des moments des vecteurs $AB, BC, \dots, NA$.

Il est aisé de voir que le moment d'un polygone ainsi défini est indépendant de la position du point O . Car, si l'on mène par A des vecteurs égaux et parallèles à $AB, BC, \dots, NA$, la somme des moments de ces nouveaux vecteurs est nulle, en vertu du théorème de Varignon; or la différence entre le moment de chacun

des nouveaux vecteurs et celui du vecteur primitif correspondant ne dépend pas du point O ; donc, la somme des moments des vecteurs primitifs, c'est-à-dire le moment du polygone, est indépendante de la position du point O.

D'autre part, si l'on décompose un polygone en plusieurs autres, on voit immédiatement que le moment du polygone total est la somme des moments des polygones partiels ; et, si l'on considère un triangle, en faisant coïncider le point O avec l'un des sommets, on voit que le moment du triangle est *positif*. Comme un polygone est décomposable en triangles, le moment d'un polygone quelconque P est aussi *positif* et peut se représenter par lp , en désignant par l une longueur constante et par p une longueur qui ne dépend que du polygone P.

Ceci posé, supposons le polygone P décomposé en plusieurs polygones Q, R, S ; le moment de P sera égal à la somme des moments de Q, R, S :

$$lp = lq + lr + ls.$$

Si le polygone total P pouvait être équivalent à l'une de ses parties, Q par exemple, c'est-à-dire si P et Q pouvaient être décomposés en polygones partiels superposables chacun à chacun, le moment de P, comme celui de Q, serait égal à la somme des moments des polygones partiels, et l'on aurait

$$lp = lq :$$

d'où

$$q + r + s = q.$$

Donc, la *longueur* totale $q + r + s$ serait égale à l'une de ses parties q , ce qui est impossible. Il est donc impossible que le polygone P soit équivalent à l'une de ses parties. c. q. r. d.

Inutile de dire que je suppose qu'on a démontré le théorème de Varignon sans se servir de la considération des aires.

D'ailleurs toutes ces considérations s'appliquent aux polyèdres.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXIII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.)

	Pages.
Liste des Présidents de la Société mathématique de France.....	IV
Liste des Sociétaires perpétuels.....	V
État de la Société mathématique au commencement de 1895.....	VI
Liste des Sociétés correspondantes et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son <i>Bulletin</i>	XV
L¹11d. — Sur les courbes de courbure des surfaces du second ordre; par M. MANNHEIM.....	1
M¹1a. — Sur les courbes gauches algébriques auto-corrélatives; par M. GINO LORIA.....	4
D 4a. — Mémoire sur la théorie infinitésimale des équations et les fonctions implicites; par M. A. PELLET.....	7
F 8a. — Sur une formule de la théorie des fonctions elliptiques; par M. E. GOURSAT.....	18
O 8a. — Sur le développement des coordonnées d'un point dans le mouvement relatif et sur la courbure des lignes orthogonales; par M. BALITRAND.....	26
D 2e. — Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues; par M. H. VON KOCH.....	33
I 10. — Extension du théorème de Fermat sur les nombres polygones; par M. ED. MAILLET.....	40
H 2c2. — Sur certaines équations qu'on intègre en les différentiant; par M. L. RAFFY.....	50
H 5a2. — Remarque sur une équation différentielle linéaire; par M. C.-A. LAISANT.....	62
H 5b. — Sur certaines équations différentielles linéaires; par M. L. RAFFY.....	63
J 2b. — Sur la composition des lois de probabilité des erreurs de situation d'un point sur un plan; par M. M. D'OCAGNE.....	65
O 6k. — Note sur la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants soit constante; par M. A. DEMOULIN.....	71
D 6a3. — Sur les fonctions algébriques à trois déterminations; par M. G. FLOQUET.....	76

	Pages.
H 2cδ. — Sur des équations différentielles analogues à l'équation de Clairaut; par M. E. GOURSAT.....	88
O 2b. d. — Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure; par M. C.-A. LAISANT.....	95
R 9a. — Note sur la théorie du frottement de roulement; par M. P. APPELL.....	98
M 4a. — Sur une expression du genre des courbes gauches algébriques douées de singularités quelconques; par M. GUCCIA.....	101
H 41e. — Sur une équation fonctionnelle; par M. LECORNU.....	102
O 6k. — Sur la déformation des surfaces; par M. PAUL ADAM.....	106
S 2a. — Équation d'une trajectoire fluide; par M. TOUCHE.....	111
O 6a. — Étude géométrique sur l'hélicoïde réglé le plus général; par M. M. D'OCAGNE.....	114
J 1aβ. — Mémoire sur les séquences des permutations circulaires; par M. DESIRÉ ANDRÉ.....	122
J 2c. — Note sur une question de probabilités traitée par d'Alembert dans l' <i>Encyclopédie</i> ; par M. G. MAUPIN.....	185
O 2b. d. — A propos des asymptotes et des cercles de courbure; par M. C.-A. LAISANT.....	190
V 7. — Note relative à un passage d'Albert Girard; par M. G. MAUPIN.....	191
D 4e x. — Sur les fonctions à espaces lacunaires; par M. ARONÉ.....	193
O 6k. — Sur la déformation des surfaces observées; lignes de courbure; par M. PAUL ADAM.....	195
P 6g x. — Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales; par M. DEMOULIN.....	198
O 6k. — Théorème sur la déformation des surfaces de translation; par M. PAUL ADAM.....	204
R 8a x. — Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe; par M. G. KÖBB.....	210
K 6a. — Sur un système de coordonnées tétraédriques; par M. V. CHLEGEL.....	216
O 6k. — Mémoire sur la déformation des surfaces; par M. PAUL ADAM.....	219
K 21aδ. — Note sur une construction approchée du développement de la circonférence et remarques diverses; par M. ÉM. LEMOINE.....	242
H 11d. — Un théorème sur les fonctions itératives; par M. LEMERAY.....	255
J 2c. — Sur une question de probabilités traitée par d'Alembert; par M. DELANNOY.....	262
R 2bγ. — Sur le centre de gravité d'une espèce de solide à deux dimensions infiniment petites; par M. S. MANGEOT.....	266
K 9a x. — Sur le postulat relatif à l'équivalence des polygones, considéré comme corollaire du théorème de Varignon; par M. GERARD.....	268
Table des matières du tome XXIII.....	271

FIN DE LA TABLE DU TOME XXIII.

QA Société mathématique de
1 France, Paris
S59 Bulletin
t.22-23
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
